



Opgave 3

Betragt følgende optimeringsproblem med én bibetingelse:

$$\max_{x,y} 2x + y \quad \text{under bibetingelsen} \quad x^2 + y^2 = 20.$$

(a) Opskriv Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, y)$ for dette problem, og opstil de tre førsteordensbetingelser.

$$\mathcal{L}(x, y) = 2x + y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 20)$$

De tre førsteordensbetingelser er:

$$\textcircled{1} \mathcal{L}'_1(x, y) = 0, \quad \textcircled{2} \mathcal{L}'_2(x, y) = 0 \quad \text{og} \quad \textcircled{3} x^2 + y^2 = 20$$

Da:

$$\textcircled{1} \quad 0 = 2 - \lambda \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} \quad 0 = 1 - \lambda \cdot 2y$$

$$\textcircled{3} \quad 20 = x^2 + y^2$$

(b) Bestem de to løsninger til førsteordensbetingelserne.

AF $\textcircled{1}$ følger: $\lambda \cdot 2x = 2 \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \lambda$. Ved indsættelse i $\textcircled{2}$:

$$0 = 1 - \frac{1}{x} \cdot 2y$$

$$\frac{1}{x} \cdot 2y = 1$$

$$2y = x$$

Ved indsættelse i $\textcircled{3}$:

$$20 = (2y)^2 + y^2$$

$\Downarrow$

$$20 = 4y^2 + y^2$$

$\Downarrow$

$$4 = y^2$$

$$\pm 2 = y$$

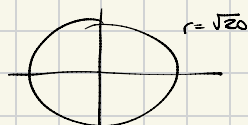
Heraf følger at $x = \pm 4$. λ er således: $\pm \frac{1}{4}$. Løsningerne er da:

$$(x, y, \lambda) = (4, 2, \frac{1}{4}) \quad \text{og} \quad (x, y, \lambda) = (-4, -2, -\frac{1}{4})$$

(c) Brug ekstremværdisætningen (*The Extreme Value Theorem*) til at redegøre for, at der findes en løsning til optimeringsproblemet.

Bestem den entydige løsning til problemet og den tilhørende maksimumsværdi.

Funktionen optimeres under bibetingelsen: $x^2 + y^2 - 20 = 0$, som er sammensat af kontinuerte funktioner og derfor selv er kontinuert og differentiable. Dertil kommer, at bibetingelsen afgrænser en kompakt mængde (se næstkomende sætning), der indeholder alle sine randpunkter og er afsluttet. Derfor findes en jf. ekstremværdisætning en løsning til optimeringsproblemet.



Fra b) følger, at de eneste to løsninger til førsteordensbetingelserne, hvilket medfører, at der nødvendigvis kan være disse bud. Ved $(4,2)$ er udtrykket, der skal maksimeres: $8+2=10$, mens $(-4,-2)$ giver værdi -10 . $(4,2)$ med $\eta=\frac{1}{4}$ er således den endelige løsning til optimeringsproblemet.

1. Problem 1: Maximum Area Rectangle in a Circle

Maximize the area of a rectangle inscribed in a circle of radius r .

Objective function: $A(x, y) = 4xy$ (Area of the rectangle)

Constraint: $x^2 + y^2 = r^2$ (Equation of the circle)

$$L = 4xy - 1 \cdot (x^2 + y^2 - r^2)$$

De tre førsteordensbetingelser er:

$$^1 x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad ^2 4y - 1 \cdot 2x = 0, \quad ^3 4x - 1 \cdot 2y = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 4y = 1 \cdot 2x$$

$$\frac{2y}{x} = 1$$

$$\textcircled{3} \quad 4x = 1 \cdot 2y$$

$$\frac{2x}{y} = 1$$

$$\frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$$

$\Rightarrow y^2 = x^2$, da $x > 0$ og $y > 0$ fordi der er tale om et geometrisk problem gælder:

$$y = x$$

Ved indsættelse i $\textcircled{1}$

$$x^2 + x^2 = r^2$$

$$2x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} = y$$

Det maksimale areal er således:

$$4 \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \underline{\underline{2r^2}}$$

Problem:Maximize the function $f(x, y) = 3x - 4y$ subject to the constraint $x^2 + 4y^2 = 24$.

$$L = 3x - 4y - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 24)$$

De tre FLOS er:

$$\textcircled{1} x^2 + 4y^2 - 24 = 0, \textcircled{2} 3 - \lambda \cdot 2x = 0, \textcircled{3} -4 - \lambda \cdot 8y = 0$$

Fra $\textcircled{2}$ følger, at:

$$3 = \lambda \cdot 2x$$

$$\frac{3}{2x} = \lambda$$

Fra $\textcircled{3}$ følger:

$$-4 = \lambda \cdot 8y$$

$$\frac{-4}{8y} = \lambda$$

$$\frac{-1}{2y} = \lambda$$

Dvs:

$$\frac{3}{2x} = -\frac{1}{2y}$$

}

$$6y = -2x$$

$$-3y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{x}{3}$$

Vel indsætte i $\textcircled{1}$

$$x^2 + 4y^2 - 24 = 0$$

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 24$$

$$x^2 + \frac{4x^2}{9} = 24$$

$$\frac{9x^2}{9} + \frac{4x^2}{9} = 24$$

$$\frac{13x^2}{9} = 24$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{24 \cdot 9}{13}}$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot \pm \sqrt{\frac{24 \cdot 9}{13}}$$

Da der er tale om et fysisk problem, er det en god ide at tage hensyn til:

$$x = \pm \sqrt{\frac{24 \cdot 9}{13}}, \quad y = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 9}{13}}, \quad \lambda = -\frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 9}{13}}}$$

Med en maks værdi på $\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3}$ (fundet ved CAS)

1. Consider the problem $\max f(x, y) = 3x + 4y$ s.t. $g(x, y) = x^2 + y^2 = 225$.

(a) Solve both it, and the corresponding minimization problem, using the Lagrange multiplier method.

(b) Suppose the right-hand side of the constraint is changed from 225 to 224. What is the approximate change in the maximum value of f ?

Lagrange funktionen opskrives:

$$L = 3x + 4y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 225), \text{ hvor}$$

$$L'_1(x, y) = 3 - \lambda \cdot 2x \quad \text{og} \quad L'_2(x, y) = 4 - \lambda \cdot 2y$$

$$\lambda \cdot 2x = 3$$

$$\lambda = \frac{3}{2x}$$

$$\lambda \cdot 2y = 4$$

$$\lambda = \frac{4}{2y}$$

Forholdes mellem x og y findes nu vha. ovenstående:

$$\frac{3}{2x} = \frac{4}{2y}$$

$$6y = 8x$$

$$3y = 4x$$

$$\frac{3}{4} \cdot y = x$$

Vel indsættelse i begrænsningen:

$$\frac{9}{16} \cdot y^2 + y^2 = 225$$

$$\frac{9y^2}{16} + \frac{16y^2}{16} = 225$$

$$y^2 = \frac{225 \cdot 16}{25}$$

$$y = \pm \sqrt{9 \cdot 16}$$

$$y = \pm 12, \text{ hvor}$$

$$x = \pm \frac{3}{4} \cdot 12 = \pm 9, \text{ Vel indsættelse}$$

$$f(12, 9) = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 9 = 72$$

$$f(-12, 9) = -72$$

$$\lambda = +\frac{1}{6}$$

4. Consider the utility maximization problem $\max U(x, y) = \sqrt{x} + y$ s.t. $x + 4y = 100$.

(a) Using the Lagrange method, find the quantities demanded of the two goods.

(b) Suppose income increases from 100 to 101. What is the exact increase in the optimal value of $U(x, y)$? Compare with the value found in (a) for the Lagrange multiplier.

$$L(x, y) = \sqrt{x} + y - \lambda \cdot (x + 4y - 100)$$

De tre FOCs er:

$$L'_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \lambda = 0, \quad L'_2(x, y) = 1 - 4\lambda = 0, \quad x + 4y = 100$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda$$

$$\text{og} \quad 1 = 4\lambda$$

$$\frac{1}{4} = \lambda$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

$$4 = 2\sqrt{x}, \quad x + 4y = 100 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 4 + y = 25 \Leftrightarrow y = 24$$

Den maksimale nytte er da: $U = \sqrt{4} + 24 = \underline{\underline{26}}$

b) Hvis $100 \rightarrow 101$, vil nytte stige med $\lambda = \frac{1}{4}$

$$(a) \min f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ s.t. } g(x,y) = x + 2y = 4$$

Lagrange funktionen opskrives:

$$L = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (x + 2y - 4), \text{ hvor}$$

$$L_1'(x,y) = 2x - \lambda \quad \text{og} \quad L_2'(x,y) = 2y - \lambda \cdot 2 = 2 \cdot (\lambda - 1)$$

De tre FOCs er da:

$$0 = 2x - \lambda, \quad x + 2y = 4 \quad \text{og} \quad 0 = 2 \cdot (\lambda - 1)$$

$$\lambda = 2x$$

$$\lambda = 1$$

Da gælder:

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ved indsættelse i begrænsningen:

$$\frac{1}{2} + 2y = 4$$

$$y + 4y = 8$$

$$5y = 8$$

$$y = \frac{8}{5}$$

$$\text{hvor } x = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Funktionen bliver således minimeret ved $(x,y,\lambda) = (\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{8}{5})$.

$$(b) \min f(x,y) = x^2 + 2y^2 \text{ s.t. } g(x,y) = x + y = 12$$

$$L = x^2 + 2y^2 - \lambda \cdot (x + y - 12), \quad L_1'(x,y) = 2x - \lambda, \quad L_2'(x,y) = 4y - \lambda$$

De tre FOCs er da:

$$x + y = 12, \quad 0 = 2x - \lambda, \quad 0 = 4y - \lambda \quad \text{Da:}$$

$$\lambda = 2x, \quad \lambda = 4y; \quad 2x = 4y$$

$$x = 2y$$

Ved indsættelse i begrænsningen:

$$2y + y = 12$$

$$3y = 12$$

$$y = 4, \quad x = 8, \quad \lambda = 16$$

Min er således $(x,y,\lambda) = (8,4,16)$

$$(c) \max f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \text{ s.t. } g(x,y) = x + y = 100$$

$$L = x^2 + 3xy + y^2 - \lambda \cdot (x + y - 100), \quad L_1'(x,y) = 2x + 3y - \lambda, \quad L_2'(x,y) = 3x + 2y - \lambda$$

De tre FOC er da:

$$0 = 2x + 3y - \lambda, \quad 0 = 3x + 2y - \lambda \quad \text{og} \quad x + y = 100$$

$$\Rightarrow \lambda = 2x + 3y, \quad \lambda = 3x + 2y$$

$$2x + 3y = 3x + 2y$$

$$y = x$$

$\rightarrow$ indsæt i begrænsning:

$$2x = 100 \Leftrightarrow x = 50 = y, \quad \lambda = 250$$

$$(x,y,\lambda) = (50,50,250)$$

SM 2. Solve the problems:

(a) $\max x^2 + y^2 - 2x + 1$ s.t. $x^2 + 4y^2 = 16$

Lagrange funktion opskrives:

$$L = x^2 + y^2 - 2x + 1 - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 16) \quad \text{hvor:}$$

$$L'_1(x, y) = 2x - 2 - 2x \cdot \lambda = 2 \cdot (x - 1 - x \cdot \lambda) \quad , \quad L'_2(x, y) = 2y - 8y \cdot \lambda = 2 \cdot (y - 4y \cdot \lambda)$$

De tre FOCs er således:

$$x - 1 - x \cdot \lambda = 0 \quad , \quad y - 4y \cdot \lambda = 0 \quad \text{og} \quad x^2 + 4y^2 = 16$$

$$x = 1 + x \cdot \lambda$$

$$1) \quad y = 0 \quad \text{er en løsning}$$

$$x - 1 = x \cdot \lambda$$

$$2) \quad y \neq 0$$

$$\frac{x-1}{x} = \lambda$$

$$4y \cdot \lambda = y$$

$$4 \cdot \lambda = 1$$

$$1 - \frac{1}{x} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

For $y = 0$ gælder: $x^2 + 0 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$, $\lambda = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

For $y \neq 0$ gælder:

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

$$4 - \frac{4}{x} = 1$$

$$-\frac{4}{x} = -3$$

$$-4 = -3x$$

$$\frac{4}{3} = x$$

y er da givet ved:

$$f\left(\frac{4}{3}, y\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4y^2 - 16$$

$$-4y^2 = \frac{16}{9} - 16$$

$$4y^2 = -\frac{16}{9} + 16$$

$$4y^2 = -\frac{16}{9} + \frac{16 \cdot 9}{9} = \frac{-16 + 144}{9} = \frac{128}{9}$$

$$y^2 = \frac{128}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{128}{36} = \frac{32}{9}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{32}{9}}$$

De mulige ekstremumspunkter er da:

$$f(4, 0, \frac{5}{4}) = (x, y, \lambda) \quad \text{max}$$

$$f(-4, 0, \frac{3}{4}) = (x, y, \lambda)$$

$$f\left(\frac{4}{3}, \sqrt{\frac{32}{9}}, \frac{1}{4}\right) = (x, y, \lambda) \quad \text{min}$$

$$f\left(\frac{4}{3}, -\sqrt{\frac{32}{9}}, \frac{1}{4}\right) = (x, y, \lambda)$$

jf.

fact.

$$(b) \min \ln(2+x^2) + y^2 \text{ s.t. } x^2 + 2y = 2$$

Lagrange funktionen opskrives:

$$L = \ln(2+x^2) + y^2 - \lambda \cdot (x^2 + 2y - 2) \quad , \quad \text{hvor:}$$

$$L'_1(x,y) = \frac{1}{2+x^2} \cdot 2x - \lambda \cdot 2x = \frac{2x}{2+x^2} - \lambda \cdot 2x$$

$$L'_2(x,y) = 2y - 2 \cdot \lambda = 2 \cdot (y - \lambda)$$

De tre FOCs er således:

$$\textcircled{1} y - \lambda = 0, \quad \textcircled{2} \frac{2x}{2+x^2} - \lambda \cdot 2x = 0 \quad \text{og} \quad \textcircled{3} x^2 + 2y = 2$$

Dvs:

$x \cdot \left(\frac{1}{2+x^2} - \lambda \right) = 0$ heraf følger, at $x=0$ og $\lambda = \frac{1}{2+x^2}$ er de eneste løsninger. Ved $x=0$ giver begrænsningen $\rightarrow x=0$ er en løs.

$x^2 + 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$. Af $\textcircled{1}$ følger, at $y = \lambda$, hvorfor $(x, y, \lambda) = (0, 1, 1)$ er den første løsningskandidat. For $x \neq 0$ gælder:

$$\frac{1}{2+x^2} = \lambda$$

Der indsættes af dette i begrænsningen får:

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2+x^2} \right) = 2$$

$$x^2 + \frac{2}{2+x^2} = 2$$

$$x^2 \cdot (2+x^2) + 2 = 2 \cdot (2+x^2)$$

$$2x^2 + x^4 + 2 = 4 + 2x^2$$

$$x^4 = 2$$

$$x = \pm \sqrt[4]{2}$$

Der indsættes i begrænsningen får:

$$x^2 + 2y = 2$$

↯

$$\frac{1}{2}x^2 + y = 1$$

↯

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

De tre løsningskandidater er således:

$$f(-\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}), \quad f(\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}), \quad f(0, 1) \approx 1,69$$

$$\searrow \quad \swarrow \\ \approx 1,31$$

Først opskrives Lagrange funktion:

$$L = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (x + 2y - 4), \text{ hvor } L_1'(x,y) = 2x - \lambda \text{ og } L_2'(x,y) = 2y - 2\lambda.$$

De tre FOCs er således:

$$2x - \lambda = 0, \quad 2 \cdot (y - \lambda) = 0, \quad x + 2y = 4 \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ eller } y=0 \text{ er}$$

Forholdet mellem x og y er da:

$$2x = \lambda, \quad y = \lambda$$

ikke en løsning

$$2x = y$$

Ved indsættelse i begrænsningen fås:

$$x + 2 \cdot (2x) = 4$$

$$x + 4x = 4$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}, \quad y = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

Minimumspunktet er således $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{8}{5})$

$$(c) \max f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \text{ s.t. } g(x,y) = x + y = 100$$

$$L = x^2 + 3xy + y^2 - \lambda \cdot (x + y - 100), \text{ hvor } L_1'(x,y) = 2x + 3y - \lambda, \quad L_2'(x,y) = 3x + 2y - \lambda$$

De tre FOCs er således:

$$2x + 3y - \lambda = 0, \quad 3x + 2y - \lambda = 0 \quad \text{og} \quad x + y = 100$$

$$\Downarrow \quad 2x + 3y = \lambda \quad \Downarrow \quad 3x + 2y = \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x=0 \\ \text{eller } y=0 \end{pmatrix} \text{ er ikke en løsning.}$$

$$2x + 3y = 3x + 2y$$

$$y = x$$

Ved indsættelse i begrænsning fås:

$$x + x = 100$$

$$x = 50 = y, \quad \lambda = 2 \cdot 50 + 3 \cdot 50 = \underline{\underline{250}}$$

$$\text{Da } (x,y,\lambda) = \underline{\underline{(50, 50, 250)}}$$

