



(a) Vis, at

$$\int_0^2 x e^{1+x^2} dx = \frac{e(e^4 - 1)}{2}.$$

Ovenstående integral løses ved substitution:

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{1}{2x} \cdot du$$

$$\int_1^5 \frac{1}{2} \cdot e^u du = \frac{1}{2} \cdot \int_1^5 e^u = \frac{1}{2} \cdot (e^5 - e^1) = \frac{e \cdot (e^4 - 1)}{2} \quad \checkmark$$

(b) Lad f være en kontinuert funktion defineret på $\mathbb{R}$ med stamfunktion F .
Vis, at

$$\int x^2 f(x^3) dx = \frac{1}{3} F(x^3) + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en arbitrær konstant.}$$

Ovenstående vises igen ved substitution:

$$u = x^3$$

$$dx = \frac{1}{3x^2}$$

$$\int \frac{1}{3} \cdot f(u) du = \frac{1}{3} F(x^3) + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en arbitrær konstant.}$$

Opgave 2

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^4 (2x + \frac{1}{2x}) dx \quad \text{og} \quad \int_1^2 4x(x-1)^3 dx.$$

Det første integral udregnes herfor:

$$\int_1^4 2x + \frac{1}{2} x^{-1} = \left[x^2 + \frac{1}{2} \ln(x) \right]_1^4$$

$$= \left(16 + \frac{1}{2} \cdot \ln(4) \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \ln(1) \right)$$

$$= 16 + \frac{1}{2} \cdot \ln(4) - 1 = 15 + \ln(4^{1/2}) = 15 + \ln(2) \quad \checkmark$$

Det andet integral bestemmes vha. partiel integration:

$$g(x) = 4x$$

$$g'(x) = 4$$

$$f'(x) = (x-1)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4$$

$$\int_1^2 4x \cdot (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 \cdot 4x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 \cdot 4 dx$$

$$= \left[(x-1)^4 \cdot x \right]_1^2 - \int_1^2 (x-1)^4 dx$$

$$= \left[(x-1)^4 \cdot x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{5} \cdot (x-1)^5 \right]_1^2$$

$$= (1 \cdot 2) - (0) - \left(\frac{1}{5} \cdot 1\right) - (0)$$

$$= 2 - \frac{1}{5} = \frac{10}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \quad \checkmark$$

(c) Vis, at følgende uegentlige integral (*improper integral*) konvergerer:

$$\int_1^{\infty} e^{-x\sqrt{x}} dx.$$

Hint: Brug sammenligningstest (*comparison test*).

For at vise, at ovenstående integral konvergerer benyttes sammenligningstesten, idet det gælder, at integralet for $g(x)$ (i dette tilfælde $e^{-x\sqrt{x}}$) konvergerer, hvis integralet for $f(x)$ også konvergerer, hvis $f(x) \leq g(x)$, da:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} g(x) dx$$

Det gælder nu, at $e^{-x} \leq e^{-x\sqrt{x}}$. Hvis $\int_1^{\infty} e^{-x}$ konvergerer, vil integralet fra opgave således også konvergere. Det undersøges nedenfor:

$$\int_1^b e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_1^b = -e^{-b} + e^{-1} \rightarrow e^{-1}, \text{ når } b \rightarrow \infty$$

Da dette integral konvergerer er det vist, at integralet for opgave også konvergerer. $\checkmark$

(b) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^2 6xe^{x^2} dx.$$

Det bestemte integral bestemmes via substitution:

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{1}{2x} \cdot du$$

$$\int_0^2 6x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} \cdot du = \int_0^4 3 \cdot e^u \cdot du = 3 \cdot \left[e^u\right]_0^4$$

$$= 3e^4 - 3e^0 = 3 \cdot (e^4 - 1) \quad \checkmark$$

(c) Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[1, \infty)$.

Antag, at $f(x) \geq 0$ for alle $x \geq 1$, og at det uegentlige integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

konvergerer.

Vis, at så vil

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

også konvergere.

For at vise, at ovenstående integral konvergerer benyttes sammenligningstesten, idet funktionerne $f(x)$ og $\frac{f(x)}{x}$ er kontinuerte for $x \geq 1$ og det gælder, at:

$$\frac{f(x)}{x} \leq f(x), \text{ for alle } x \geq 1$$

Da $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer medfører ovenstående, at $\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ også konvergerer.

(c) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx \quad \text{og} \quad \int_0^t \frac{e^x}{2+e^x} dx \quad (\text{hvor } t \text{ er et reelt tal}).$$

Det første integral løses nedenfor vha substitution:

$$\int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{1+x^3}$$

$$u = 1+x^3$$

$$dx = \frac{1}{3x^2} du$$

$$\int_1^9 x^2 \cdot \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{1}{u} du = \int_1^9 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u} du = \left[\frac{1}{3} \cdot \ln(u) \right]_1^9$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln(9) - \frac{1}{3} \cdot \ln(1) = \frac{1}{3} \cdot \ln(3^2) = \frac{2}{3} \cdot \ln(3)$$

✓

Det andet integral løses tilsvarende

$$\int_0^+ e^x \cdot \frac{1}{2+e^x}, \quad u = 2+e^x, \quad dx = \frac{1}{e^x} du$$

$$\int_0^+ \frac{1}{u} du = \left[\ln(2+e^x) \right]_0^+ = \ln(2+e^+) - \ln(3)$$

✓

grænserne kan også skiftes

$$\int_1^{e^+} = \ln(2+e^+) - \ln(3) \Rightarrow \text{samme svar!}$$

(d) Betragt funktionen k givet ved

$$k(x) = \frac{x}{e^x} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestem Taylor-polynomiet af anden orden for k omkring punktet $x = 0$.

(e) Betragt igen funktionen k fra (d). Udregn det ubestemte integral

$$\int k(x) dx.$$

Det ubestemte integral: $\int x \cdot \frac{1}{e^x} dx$ løses ved partiel integration

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}$$

$$F(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int k(x) dx &= -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} = -e^{-x} \cdot x - e^{-x} \\ &= e^{-x} \cdot (-x - 1) + C, \end{aligned}$$

hvor C er en arbitrer konstant.

Opgave 2

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^4 (2x - 3\sqrt{x}) dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 x e^{-x+1} dx.$$

Det første integral bestemmes vha. kendte stamfunktioner:

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x - 3\sqrt{x}) dx &= \left[x^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} \right]_1^4 = \left[x^2 - 2x \cdot \sqrt{x} \right]_1^4 \\ &= (16 - 8 \cdot 2) - (1 - 2) = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Det andet integral bestemmes ved integration ved partiel integration.

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f(x) = e^{-x+1}$$

$$F(x) = -e^{-x+1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x+1} dx &= \left[-e^{-x+1} \cdot x \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x+1} \\ &= (-1) - (-e^1 \cdot 0) - \left[e^{-x+1} \right]_0^1 = -1 - (1 - (e)) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx \quad (\text{hvor } x > 0).$$

Integralet løses ved substitution: $\int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$u = \ln(x)$$

$$dx = x \cdot du$$

$$\begin{aligned} &= \int u \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot du = \int u \cdot du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \cdot (\ln(x))^2 + C, \end{aligned}$$

hvor C er en arbitrer konstant.

(c) Betragt det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_0^{\infty} 6x^2 e^{-(x^3-1)} dx.$$

Vis, at dette integral konvergerer, og bestem dets værdi.

Det vises nedenfor ved brug af integration ved substitution, at integralet konvergerer, samt dets værdi.

$$u = x^3 - 1$$

$$dx = \frac{1}{3x^2} \cdot du$$

$$= \int_0^b 6x^2 \cdot \frac{1}{3x^2} \cdot e^{-u} \cdot du = 2 \cdot \int_0^b e^{-u} = \left[2 \cdot (-e^{-u}) \right]_0^b = \left[2 \cdot (-e^{-(b^3-1)}) - (2 \cdot (-e^{-1})) \right]$$

$b \rightarrow \infty, 2 \cdot (-e^{-(b^3-1)}) \rightarrow 0$

Derfor konvergerer integralet med værdien $2e$.

Opgave 2

(a) Udregn det ubestemte integral

$$\int (1+x)e^{2x} dx.$$

Integralet bestemmes ved partiel integration: $y(x) = 1+x$, $y'(x) = 1$,
 $f'(x) = e^{2x}$, $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$

$$\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot (1+x) - \int \frac{1}{2} \cdot e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot (1+x) - \frac{1}{4} \cdot e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} = \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{2x} \cdot 2x}{4} = \frac{e^{2x} \cdot (1+2x)}{4} + C, \text{ hvor } C \text{ er en arbitrer konstant}$$

(c) Vis, at det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+1)} dx.$$

konvergerer, og bestem dets værdi.

Vis dernæst, at

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+1)^2} dx.$$

også konvergerer.

$$\int_0^b e^{-(x+1)} = \left[-e^{-(x+1)} \right]_0^b = -e^{-(b+1)} + e^{-1}, \text{ når}$$

konvergerer integralet med værdien e^{-1} . $b \rightarrow \infty$, vil $-e^{-(b+1)} \rightarrow 0$, da

Da $0 < e^{-(x+1)^2} \leq e^{-(x+1)}$ og begge udtryk er kontinuerte følger det af sammenligningskriteriet, at $\int_0^{\infty} e^{-(x+1)^2} dx$ også konvergerer (da $\int_0^{\infty} e^{-(x+1)} dx$ konvergerer)

(c) Lad $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være defineret ved

$$g(x) = 2x(x^2 + 1)^3 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Udregn det ubestemte integral

$$\int g(x) dx.$$

Bestem den stamfunktion $\tilde{G}$ til g , der opfylder betingelsen

$$\tilde{G}(1) = 10.$$

Først bestemmes den generelle løsning til integralet ved substitution:

$$u = x^2 + 1 \\ dx = \frac{1}{2x} \cdot du \quad : \quad \int 2x \cdot u^3 \cdot \frac{1}{2x} \cdot du = \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 1)^4 + C, \text{ hvor } C \text{ er en}$$

arbitrær konstant. Den stamfunktion $\tilde{G}$, der opfylder betingelsen $\tilde{G}(1) = 10$ bestemmes ved:

$$10 = \frac{1}{4} \cdot (1+1)^4 + C$$

$$10 = \frac{1}{4} \cdot 16 + C$$

$$10 = 4 + C$$

$$6 = C$$

$$\tilde{G} \text{ er således givet ved } \tilde{G}(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 1)^4 + 6$$

Opgave 3

(a) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 x e^{x+3} dx.$$

Det første integral bestemmes via kendte stamfunktioner:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 - \frac{1}{x^2} &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 - \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = \left(9 - \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} - (-1) \right) \\ &= 9 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 8 // \end{aligned}$$

Det andet integral løses ved partiel integration:

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f(x) = e^{x+3}$$

$$F(x) = e^{x+3}$$

$$\begin{aligned} \left[e^{x+3} \cdot x \right]_0^2 - \int_0^2 e^{x+3} &= (2 \cdot e^5) - (e^{x+3})_0^2 \\ &= 2 \cdot e^5 - (e^5 - (e^3)) \\ &= 2 \cdot e^5 - e^5 + e^3 = e^5 + e^3 // \end{aligned}$$

(b) Afgør om det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+2} dx$$

er konvergent (kan tillægges en værdi) eller divergent. Begrund dit svar.

$$\int_0^b x \cdot \frac{1}{x^2+2}$$

(løses ved substitution: $u = x^2+2$, $dx = \frac{1}{2x} \cdot du$)

$$= \int_0^b x \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^b \frac{1}{u} \cdot du = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(u) \right]_0^b = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(b) \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(0) \right)$$

$b \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{2} \cdot \ln(b) \rightarrow \infty$

Derfor er det uegentlige integral ikke konvergent.

(c) Betragt funktionen f defineret ved

$$f(x) = x^2 \ln(x^2) \quad \text{for alle } x > 0.$$

Udregn det ubestemte integral

$$\int f(x) dx.$$

Hint: Kan løses ved anvendelse af partiel integration.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x^2) \\ g'(x) &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} \\ f'(x) &= x^2 \\ f(x) &= \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

↓
Havde også kunne rænses
og ville vi fra 1
samme svar

$$\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x^2) - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot x^{-2} \cdot 2x$$

$$\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x^2) - \int \frac{1}{3} x \cdot 2x$$

$$\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x^2) - \frac{2}{3} \cdot \int x^2$$

$$\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x^2) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3$$

$$\frac{1}{3} x^3 \cdot \ln(x^2) - \frac{2}{9} x^3 = \frac{1}{3} x^3 \cdot \left(\ln(x^2) - \frac{2}{3} \right) + C$$

hvor C er en arbitrær konstant. ✓

Opgave 2.

(1) Udregn følgende integraler

$$\int 2(x^2+1)^4 x dx,$$

Integralet løses ved substitution: $u = x^2+1$, $dx = \frac{1}{2x} \cdot du$

$$\int 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot u^4 \cdot du = \frac{1}{5} \cdot (x^2+1)^5 + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en arbitrær konstant.}$$

og for $t > 0$ tillige integralet

$$\int (te^{t^2} + \ln t) dt.$$

Integralet løses ved substitution hvor

$$u = t^2$$

$$dx = \frac{1}{2t} \cdot dx$$

$$\int t \cdot e^{t^2} dt + \int \ln(t) dt$$

$$\int t \cdot \frac{1}{2t} \cdot e^u + t \cdot \ln(t) \cdot t$$

$$\frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + t \cdot \ln(t) - t //$$

(2) Udregn integralet

$$\int_1^{e^2} \ln t dt.$$

$$\left[t \cdot \ln(t) - t \right]_1^{e^2} = (e^2 \cdot 2 - e^2) - (1 \cdot 0 - 1) = e^2 + 1$$

(3) For $a \in \mathbf{R}$ skal man løse ligningen

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 9x^2 dx.$$

Først beregnes vs. $\int_0^1 9x^2 = [3x^3]_0^1 = (3 \cdot 1) - (3 \cdot 0) = 3$

Herefter løses lns. ved substitution: $u = 1+x^2$, $dx = \frac{1}{2x} \cdot du$

$$\int_1^{1+a^2} 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = [\ln(u)]_1^{1+a^2} \quad \text{Heraf følger:}$$

$$\ln(1+a^2) = 3$$

$$1+a^2 = e^3$$

$$a^2 = e^3 - 1$$

$$a = \pm \sqrt{e^3 - 1}$$

(a) Udregn følgende bestemte integraler (i det første integral er $a > 0$):

$$\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 (x+1)e^{x+2} dx.$$

$$a) \int_a^4 x^{-0,5} = [2 \cdot x^{0,5}]_a^4 = (2 \cdot 2) - 2 \cdot \sqrt{a} = 4 - 2\sqrt{a}$$

Det andet integral bestemmes ved partiel integration:

$$g(x) = x+1$$

$$g'(x) = 1$$

$$f(x) = e^{x+2}$$

$$F(x) = e^{x+2}$$

$$\begin{aligned} [e^{x+2} \cdot (x+1)]_0^2 - \int_0^2 e^{x+2} &= ((e^4 \cdot 3) - (e^2)) - (e^4 - e^2) \\ &= 3e^4 - e^2 - e^4 + e^2 = 2 \cdot e^4 // \end{aligned}$$

(b) Afgør, om det uegentlige integral (*improper integral*)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

konvergerer.

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2 \cdot \sqrt{x} \right]_1^b = (2 \cdot \sqrt{b}) - (2 \cdot 1).$$

Da $2 \cdot \sqrt{b} \rightarrow \infty$, når $b \rightarrow \infty$, konvergerer integralet ikke.

1) Vis, at

$$\int (5x^4 e^{-3x} - 3x^5 e^{-3x} + 8x^3 - 8x) dx \\ = x^5 e^{-3x} + 2x^4 - 4x^2 + C, \text{ hvor } C \text{ er en arbitrær konstant.}$$

Ved differentiation af udtrykket vises det ønskede

$$5x \cdot e^{-3x} + x^5 \cdot e^{-3x} \cdot (-3) + 8x^3 - 8 = 5x^4 \cdot e^{-3} - 3x^5 \cdot e^{-3x} + 8x^3 - 8x$$

Da $(\int f(x))' = f(x)$ og dette er tilfældet ovenfor, er det ønskede vist.

2) Udregn ved brug af integration ved substitution det ubestemte integral

$$\int 9xe^{3x^2} dx$$

$$u = 3x^2 \\ dx = \frac{1}{6x} \cdot du = \int 9x \cdot \frac{1}{6x} \cdot e^u du = \int \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^u \cdot du = \frac{3}{2} \cdot e^{3x^2} + C, \\ \text{hvor } C \text{ er en arbitrær konstant.}$$

3) Udregn ved brug af partiel integration det ubestemte integral

$$\int 9xe^{3x} dx$$

$$g(x) = 9x$$

$$g'(x) = 9$$

$$f'(x) = e^{3x}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 9x \cdot e^{3x} - \int 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} = 3x \cdot e^{3x} - \int 3 \cdot e^{3x} \\ = 3x \cdot e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \cdot (3x - 1) + C, \text{ hvor } C \\ \text{er en arbitrær konstant.}$$

(b) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^2 6xe^{x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ dx &= \frac{1}{2x} \cdot du \end{aligned} \quad = \quad \int_0^4 6x \cdot \frac{1}{2x} \cdot e^u = \left[3 \cdot e^u \right]_0^4 = 3 \cdot e^4 - 3 \cdot e^0 = 3 \cdot e^4 - 3 = 3 \cdot (e^4 - 1)$$

(c) Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[1, \infty)$.
Antag, at $f(x) \geq 0$ for alle $x \geq 1$, og at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

konvergerer.

Vis, at så vil

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

også konvergere.

Hvis $f(x) \geq 0$ for alle $x \geq 1$ og det uegentlige integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergerer, vil $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ også konvergere. Dette følger af sammenligningstesten da $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq f(x)$, hvilket gælder, da $f(x) \geq 0$ for alle $x \geq 1$.

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int 5x(x+3)^4 dx.$$

$$g(x) = 5x$$

$$g'(x) = 5$$

$$f'(x) = (x+3)^4$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot (x+3)^5$$

en arbitrær konstant.

$$\frac{1}{5} \cdot 5x \cdot (x+3)^5 = \int 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x+3)^5$$

$$= x \cdot (x+3)^5 = \int (x+3)^5$$

$$= x \cdot (x+3)^5 = \frac{1}{6} \cdot (x+3)^6 + C, \text{ hvor } C \text{ er}$$

(c) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^1 4xe^{2x} dx.$$

Løses via partiel integration:

$$g(x) = 4x$$

$$g'(x) = 4$$

$$f'(x) = e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$$

$$\left[4x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \right]_0^1 = \int_0^1 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} = \left[2x \cdot e^{2x} \right]_0^1 = \int_0^1 2 \cdot e^{2x}$$

$$\begin{aligned} &= \left[2x \cdot e^{2x} \right]_0^1 - \left[e^{2x} \right]_0^1 = ((2 \cdot e^2) - (0)) - (e^2 - e^0) \\ &= (2e^2) - (e^2 - 1) = \underline{\underline{e^2 + 1}} \end{aligned}$$

(d) Afgør, om det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

konvergerer eller divergerer.

$$u = x+1, \quad u-1 = x, \quad dx = du$$
$$\int_0^{b+1} \frac{u-1}{u^2} du = \int_0^{b+1} \frac{u}{u^2} - \frac{1}{u} du = \int_0^{b+1} \frac{1}{u} - \frac{1}{u} du = \left[\ln(u) - u^{-1} \right]_0^{b+1}$$
$$= \left(\ln(b+1) - \frac{1}{b+1} \right) - \left(\ln(0) - 1 \right) = \ln(b+1) + \frac{1}{b+1} - 1.$$

Da $\ln(b+1) \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ og $\frac{1}{b+1} \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, vil integralet divergere.

Betragt funktionen f givet ved forskriften

$$f(x) = 2x \cdot e^{x+1} \text{ for alle } x \in \mathbb{R}$$

6) Udregn det bestemte integral

$$\int_1^2 f(x) dx$$

Vink: Benyt partiel integration for at finde en stamfunktion til f .

$$g(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2$$

$$f'(x) = e^{x+1}$$

$$F(x) = e^{x+1}$$

$$\left[2x \cdot e^{x+1} \right]_1^2 - \int_1^2 2 \cdot e^{x+1} = \left[2x \cdot e^{x+1} \right]_1^2 - \left[2 \cdot e^{x+1} \right]_1^2$$
$$= (4 \cdot e^3 - 2 \cdot e^2) - (2 \cdot e^3 - 2 \cdot e^2) = 4e^3 - 2e^2 - 2e^3 + 2e^2$$
$$= \underline{\underline{2e^3}}$$

2) Udregn det ubestemte integral

$$\int \frac{4x}{1+x^2} dx$$

$$\int 4x \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{løses ved substitution, hvor } u = 1+x^2, \quad dx = \frac{1}{2x} \cdot du$$

$$\int 4x \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = \int 2 \cdot \frac{1}{u} \cdot du = 2 \cdot \ln(1+x^2) + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en arbitrar konstant.}$$

3) Afgør, om det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} \frac{4x}{1+x^2} dx$$

konvergerer eller divergerer.

$$\text{Fra 2) har vi } 2 \cdot \ln(1+x) + C, \quad \text{da}$$

$$\left[2 \cdot \ln(1+x) \right]_0^b = 2 \cdot \ln(1+b) - 2 \cdot \ln(1) = 2 \cdot \ln(1+b), \quad b \rightarrow \infty, \quad 2 \cdot \ln(1+b) \rightarrow \infty,$$

derfor vil integralet divergere.

(c) Udregn det ubestemte integral

$$\int 3x^2 \ln(x) dx \quad (\text{hvor } x > 0).$$

Løses ved partiel integration:

$$g(x) = \ln(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$F(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} \ln(x) \cdot x^3 - \int \frac{1}{x} \cdot x^3 dx &= \ln(x) \cdot x^3 - \int x^2 dx \\ &= \ln(x) \cdot x^3 - \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int 5x(x+3)^4 dx.$$

$$g(x) = 5x, \quad g'(x) = 5, \quad f'(x) = (x+3)^4, \quad F(x) = \frac{1}{5} \cdot (x+3)^5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \cdot (x+3)^5 \cdot 5x - \int 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x+3)^5 &= x \cdot (x+3)^5 - \int (x+3)^5 \\ &= x \cdot (x+3)^5 - \frac{1}{6} \cdot (x+3)^6 + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en vilkårlig konstant.} \end{aligned}$$

1) Udregn det ubestemte integral

$$\int (-4x+6)e^{x^2-3x+2} dx$$

Vink: Benyt integration ved substitution.

$$u = x^2 - 3x + 2, \quad du = \frac{1}{2x-3}$$

$$\int (-4x+6) \cdot \frac{1}{2x-3} \cdot e^u \cdot du = \int \frac{-4x+6}{2x-3} e^u \cdot du = \int \frac{-2 \cdot (2x-3)}{2x-3} \cdot e^u \cdot du$$

$$\int -2 \cdot e^u du = -2 \cdot e^{x^2-3x+2} + C, \quad \text{hvor } C \text{ er en vilkårlig konstant.}$$

2) Afgør, om det uegentlige integral

$$\int_2^{\infty} (-4x+6)e^{x^2-3x+2} dx$$

konvergerer eller divergerer.

$$\begin{aligned} \text{Fra 1) har vi: } & \left[-2 \cdot e^{x^2-3x+2} \right]_2^b = (-2 \cdot e^{b^2-3b+2}) - (-2 \cdot e^{4-6+2}) \\ &= -2 \cdot e^{b^2-3b+2} + 2. \quad \text{Når } b \rightarrow \infty, \text{ vil } -2e^{b^2-3b+2} \rightarrow -\infty, \text{ hvorfor integralet} \\ & \text{diverger.} \end{aligned}$$

1. Determine the following integrals, if they converge. Indicate those that diverge.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ (b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (c) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ (d) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, where $a > 0$

a) $\int_1^{\infty} x^{-3} = \left[-\frac{1}{2} \cdot x^{-2} \right]_1^b = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{1}{2}$, när $b \rightarrow \infty$, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2} \rightarrow 0$,
derfor konvergera integralen mot värdet $\frac{1}{2}$.

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} = \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_1^b = (2 \cdot \sqrt{b}) - (2 \cdot \sqrt{1}) = 2\sqrt{b} - 2$, när $b \rightarrow \infty$, $2\sqrt{b} \rightarrow \infty$,
derfor divergera integralen.

c) $\int_{-\infty}^0 e^x = \left[e^x \right]_{-\infty}^0 = 1 - e^{-\infty}$, $b \rightarrow \infty$, $e^{-b} \rightarrow 0$, derfor konvergera integralen mot 1.

d) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $a > 0 = \int_0^a x \cdot (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, $u = a^2 - x^2$, $dx = \frac{1}{-2x} \cdot du$
 $= \int_0^a x \cdot \frac{1}{-2x} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot du = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^a u^{-\frac{1}{2}} = \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^a = \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{0} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2} \right) =$
 $= \underline{\underline{a}}$

5. The function f is defined for all $x > 0$ by $f(x) = (\ln x)/x^3$.

(a) Find the maximum and minimum points of f , if there are any.

(b) Examine the convergence of $\int_0^1 f(x) dx$ and $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

b) $\int \ln(x) \cdot \frac{1}{x^3}$, lösas via partiell, hvor $\ln(x) = g(x)$, $\frac{1}{x} = g'(x)$, $x^{-3} = f(x)$
 $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2}$
 $= \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \cdot \ln(x) \right] - \int -\frac{1}{2} x^{-2} \cdot x^{-1} = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \cdot \ln(x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cdot x^{-3} = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \cdot \ln(x) \right] + \int \frac{1}{2} x^{-3}$
 $= \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right] + \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]$

a) $= \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_a^1 = \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot \ln(a) \right) + \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a^4} \right) \right)$, när $a \rightarrow 0$, går
uttrycket mot $+\infty$, hvorfor integralen divergera.

b) $\left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) \right]_1^b + \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_1^b = \left(\left(\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \ln(b) \right) - (0) - \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b^4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1^4} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \ln(b) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b^4}$
idå $\frac{1}{2} b^2 \cdot \ln(b) \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ og $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{b^4} \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, konvergera
integralen mot $\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$.

(e) $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

Integralen løses ved substitution, hvor $u = x^3 + 1$, $dx = \frac{1}{3x^2} \cdot du$:

$\int_1^9 x^2 \cdot \frac{1}{3x^2} \cdot \sqrt{u} \cdot du = \int_1^9 \frac{1}{3} \cdot \sqrt{u} \cdot du = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u \cdot \sqrt{u} \right]_1^9 = \left[\frac{2}{9} \cdot u \cdot \sqrt{u} \right]_1^9 = \left(\frac{2}{9} \cdot 9 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2}{9} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 6 - \frac{2}{9}$

$\frac{6 \cdot 9}{1 \cdot 9} - \frac{2}{9} = \frac{54}{9} - \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{52}{9}}}$

$$(f) \int_{-\infty}^0 \frac{e^{3z}}{e^{3z} + 5} dz$$

Integralen løses ligeledes ved substitution:

$$\int_{-\infty}^0 e^{3x} \cdot \frac{1}{e^{3x} + 5} dx, \quad u = e^{3x} + 5, \quad dx = \frac{1}{e^{3x} \cdot 3} \cdot du$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{3x} \cdot \frac{1}{e^{3x} \cdot 3} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = \left[\frac{1}{3} \cdot \ln(e^{3x} + 5) \right]_{-\infty}^0 = \left(\frac{1}{3} \cdot \ln(6) \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \ln(e^{-3b} + 5) \right)$$

når $-b \rightarrow \infty$, går $e^{-3b} \rightarrow 0$, hvorfor integralet går mod: $\frac{1}{3} \cdot \ln(6) - \frac{1}{3} \cdot \ln(5) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

$$(g) \int_{1/2}^{e/2} x^3 \ln(2x) dx$$

Løses vha. partiel integration, hvor: $g(x) = \ln(2x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = x^3$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

$$\left[\frac{1}{4} x^4 \cdot \ln(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{4} x^4 \cdot \ln(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{4} x^3$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 \cdot \ln(2x) \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \left[\frac{1}{16} x^4 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = \left(\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{e}{2} \right)^4 \cdot 1 \right) - (0) \right) - \left(\left(\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{e}{2} \right)^4 \right) - \left(\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2}{16} - \left(\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{e^2}{16} \right) - \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \right) \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2}{16} - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{e^2}{16} - \frac{1}{16} \right)$$

$$(h) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \text{løses med substitution, hvor } u = \sqrt{x} \Leftrightarrow u^2 = x$$

$$\text{og } 2u du = dx$$

$$\int_1^b \frac{e^{-u} \cdot 2u}{u} \cdot du = 2 \cdot \int_1^b e^{-u} \cdot du = \left[2e^{-\sqrt{x}} (-x) \right]_1^b = (2e^{-\sqrt{b}} \cdot (-b)) - (-2e^{-1})$$

$$= 2e^{-1}, \quad \text{ford } 2e^{-\sqrt{b}} \cdot (-b) \rightarrow 0, \quad \text{når } b \rightarrow \infty.$$

(b) Udregn det ubestemte integral

$$\int (4x + 2)e^{2x} dx.$$

Løs med partiell integration:

$$g(x) = 4x + 2$$

$$g'(x) = 4$$

$$f'(x) = e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot (4x + 2) - \int \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{2x} &= 2x e^{2x} + e^{2x} - \int 2 \cdot e^{2x} \\ &= 2x e^{2x} + e^{2x} - e^{2x} = \underline{\underline{2x \cdot e^{2x}}} + C, \text{ hvor } C \text{ er} \\ &\text{arbitrær konstant.} \end{aligned}$$