



Bruges når begrænsningen ikke er lig noget, men er hhv. større eller mindre end en værdi. Nedenstående skal derfor løses ved randundersøgelser:

Opgave 3

Betragt funktionen f af to variable, der er givet ved forskriften

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - x \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestem de partielle afledede $f'_1(x, y)$ og $f'_2(x, y)$.

$$f'_1(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2x - 1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - 1$$

$$f'_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

(b) Bestem alle kritiske punkter for f .

At $f'_2(x, y) = 0$ fremgår det, at $y = 0$ ved et givent kritisk punkt.

Da følger

$$\frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = 1$$

$$2x = x^2 + 1$$

$$0 = x^2 - 2x + 1$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Altså er det eneste kritiske punkt givet ved $x=1, y=0$, i.e. $(1, 0)$.

(c) Bestem alle de anden-ordens partielle afledede af f .

$$f''_{11}(x, y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f''_{12}(x, y) = \frac{-2x \cdot (2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f''_{21}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f''_{22}(x, y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 2y \cdot (2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

I resten af opgaven betragtes funktionen f på mængden

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(d) Gør rede for, at f har et globalt minimumspunkt og et globalt maksimumspunkt på S .

Mængden S er givet ved en cirkel med radius 2, og er derfor afsluttet og begrænset. Desuden er den sammensat af to kontinuerte funktioner og er derfor nødvendigvis selv kontinuert. Ekstremværdisætningen viser således, at f har et globalt min- og maksimum på mængden.

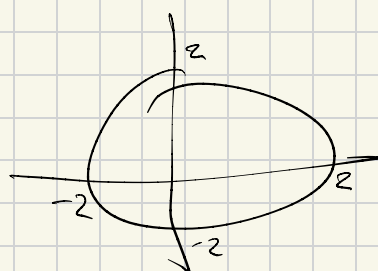
- (e) Bestem alle globale ekstremumpunkter for f på S .
 Bestem også de tilhørende ekstremumsværdier.
 (Til besvarelsen kan anvendes, at $\ln(2) \approx 0,69$ og $\ln(5) \approx 1,61$.)

De 'indre' kritiske punkter blev fundet i b) og er givet ved $(1,0)$. De 'ydre' punkter findes ellers, hvor det gælder at $x^2 + y^2 = 4$. Derfor er funktionsværdierne på randen givet ved $\ln(5) - x$, hvor $-2 \leq x \leq 2$. Da $\ln(5)$ er en strengt aftagende funktion vil $x = -2$ give max, mens $x = 2$ giver min. De mulige globale ekstrem er da:

$$\ln(5) - 2$$

$$\ln(5) + 2$$

$$\ln(2) - 1.$$



Da $\ln(5) - 2 \leq \ln(2) - 1 \leq \ln(5) + 2$, er $(2,0)$ det globale minimum, mens $(-2,0)$ er det globale maksimum.

EXAMPLE 17.5.1

Find the extreme values for $f(x, y)$ defined over S , where

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1 \text{ and } S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Først findes de indre kritiske punkter:

$$f_1'(x, y) = 2x$$

$$f_2'(x, y) = 2y + 1$$

De kritiske punkter er da $x = 0$ og $y = -\frac{1}{2}$. Da mængden S afgrænser en cirkel med centrum i origo og $r = 1$, er de tale om en kompakt mængde med et globalt min- og max. De 'ytre' kritiske punkter findes nu ved at betragte $x^2 + y^2 = 1$ på f . $f(x, y) = 1 + y - 1 = y$. Da y er en voksende funktion af f , og $-1 \leq x \leq 1$, findes min ved $x = -1, y = 0$ og max ved $x = 1, y = 0$. De mulige globale ekstrem er da:

$$f(0, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{5}{4} \rightarrow \text{globalt min.}$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f(0, -1) = -1 \rightarrow \text{globalt max}$$

1. Suppose $f(x, y) = 4x - 2x^2 - 2y^2$ is defined on the domain $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$.
- Compute $f'_1(x, y)$ and $f'_2(x, y)$, then find the only critical point for f .
 - Find the extreme points for f over S .

$$a) \quad f'_1(x, y) = 4 - 4x = 4(1 - x)$$

$$f'_2(x, y) = -4y$$

Det 'indre' kritiske punkt er da $y=0$, $x=1$. Mulige kritiske punkter på randen af S er givet ved $x^2 + y^2 = 25$, da:

$$f(x) = 4x - 2(25) = 4x - 50.$$

Da f er en voldsomt funktion i x , og $-5 \leq x \leq 5$, er max givet ved $x=5$, mens min er givet ved $x=-5$. De mulige globale ekstreme er da:

$$f(1, 0) = 4 - 2 = 2 \rightarrow \text{globalt max}$$

$$f(5, 0) = 20 - 50 = -30$$

$$f(-5, 0) = -20 - (2 \cdot 25) = -20 - 50 = -70 \rightarrow \text{globalt min}$$

SM 2. Find the maximum and minimum points for the following two functions:

- (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ defined on $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4 \text{ and } 0 \leq y \leq 4\}$.

$$f'_1(x, y) = 3x^2 - 9y = 3 \cdot (x^2 - 3y)$$

$$f'_2(x, y) = 3y^2 - 9x = 3 \cdot (y^2 - 3x)$$

Da

$$x^2 - 3y = 0$$

$$x^2 = 3y$$

$$\frac{1}{3}x^2 = y$$

Altså

$$\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 - 3x = 0$$

$$\frac{1}{9}x^4 - 3x = 0$$

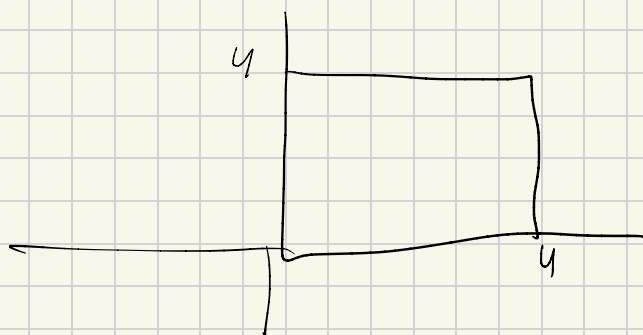
$$x^4 - 27x = 0$$

$$x \cdot (x^3 - 27) = 0$$

$$x^3 = 27$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3$$

De indre løsninger er da $(0, 0)$ og $(3, 3)$. Da S afgrænset er kompakt mængde som vist nedenfor:



Løsningene på randen kan søkes ved $(x, 0)$, $(4, y)$, $(x, 4)$, $(0, y)$

$$f(x, 0) = x^3 + 27 \in x \in [0, 4] \quad \min(0, 0) = 27, \quad \max(4, 0) = 64 + 27 = 91$$

$$f(0, y) = y^3 + 27 \in y \in [0, 4], \quad \text{---} \quad \text{||} \quad \text{---}$$

$$f(x, 4) = x^3 + 64 - 36x + 27 = x^3 - 36x + 91 \in x \in [0, 4]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{12} \quad \text{Da: } f(0, 0) = 27, \quad f(4, 4) = 11, \quad f(\sqrt{12}, 4) = 7,8$$

Det samme gjelder for $f(4, y)$

$$f(3, 3) = 27 + 27 - 9 \cdot 9 + 27 = 0$$

indre
punkt:

$$\text{Minima: } f(3, 3) = 0, \quad \text{Max: } (4, 0) = 91$$

$$(b) f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ defined on } S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$f_1'(x, y) = 2x - 1$$

$$f_2'(x, y) = 4y$$

Det indre kritiske punkt er gitt ved $x = \frac{1}{2}, y = 0$.

Da S er en kompakt mengde finnes det et globalt min- og max på mengden. De mulige kritiske punkter på randen finnes derfor, hvor $x^2 + y^2 = 1$.

$$f(x) = x^2 + 2(1 - x^2) - x = x^2 + 2 - 2x^2 - x = -x^2 - x + 2$$

$$f'(x) = -2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2x = +1$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = y^2 = 1 - \frac{1}{4} = y = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

De mulige kritiske punkter er søkes

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right), \quad f\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right), \quad f(-1, 0), \quad f(1, 0)$$

De mulige kandidater er søkes:

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{globalt min}$$

$$f(1, 0) = 0$$

$$f(-1, 0) = 1 - (-1) = 2$$

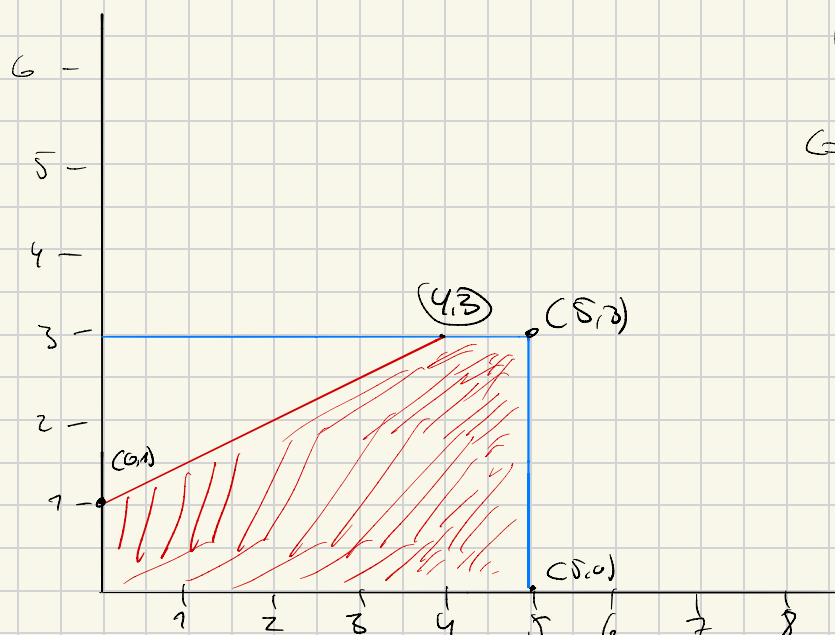
$$f\left(-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \frac{9}{4} \rightarrow \text{globalt max}$$

3. In one study of the quantities x and y of natural gas that Western Europe should import from Norway and Siberia, respectively, it was assumed that the benefits were given by the function

$$f(x, y) = 9x + 8y - 6(x + y)^2$$

Because of capacity constraints, the quantities x and y had to satisfy $0 \leq x \leq 5$ and $0 \leq y \leq 3$. Finally, for political reasons, it was felt that imports from Norway should not provide too small a fraction of total imports at the margin, so that $x \geq 2(y - 1)$. In the xy -plane, draw the set S of all points satisfying all the constraints. Then find the quantities that maximize the benefits, subject to these constraints.

Mængden S er som udgangspunkt det blå rektangel



Ulighedens medfører dog, at $x \geq 2y - 1$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 \geq y$. Dette er en lineær funktion med hældningen $\frac{1}{2}$ og skæring med $y = 1$.

$$\frac{1}{2}x + 1 = 3$$

$$x = 4$$

Mængden er således det skravrede areal.

Først findes de indre kritiske punkter:

$$f_1'(x, y) = 9 - 12 \cdot (x + y)$$

$$f_2'(x, y) = 8 - 12 \cdot (x + y)$$

Overstående ligningssystem kan dog ikke løses, hvorfor der ikke er nogle kritiske indre punkter. På randen er der:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 8 - 6 \cdot (0 + 1) = 2$$

$$f(4, 3) = -239$$

$$f(5, 3) = -315$$

$$f(5, 0) = -105$$

Nu undersøges de indre punkter langs randen:

$$f_1(x, 0) = 9x - 6 \cdot (x^2) = 9x - 6x^2, \quad x \in [0, 5]$$

$$f_1'(x, 0) = 9 - 12x \Leftrightarrow x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad f_1\left(\frac{3}{4}, 0\right) = \frac{27}{8}$$

$$f_2(0, y) = 8y - 6y^2, \quad f_2'(0, y) = 8 - 12y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}, \quad f_2\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$x \in [0, 5]$

$$f_3(5, y) = 45 + 8y - 6(5 + y)^2, \quad f_3'(5, y) = 8 - 12 \cdot (5 + y), \quad y \in [0, 3]$$

fuldvare: $[0, 3]$, derfor er der intet kritisk punkt her.

$$f_4(x, 3) = 9x + 24 - 6(x + 3)^2, \quad f_4'(x, 3) = 9 - 12 \cdot (x + 3), \quad \text{fuldvare: } [4, 5],$$

derfor ikke et kritisk punkt.

$$f_5\left(x, \frac{x}{2} + 1\right) = \frac{-27x^2}{2} - 5x + 2, \quad g'(x) = -27x - 5, \quad \text{fuldvare: } [0, 4]$$

derfor heller ikke kritiske her.

Max er da givet ved $\left(\frac{3}{4}, 0\right) = \frac{27}{8}$

2. Find the maximum and minimum points for the following two functions:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ defined on $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4 \text{ and } 0 \leq y \leq 4\}$.

Først findes de indre kritiske punkter:

$$f'_1(x, y) = 3x^2 - 9y = 3 \cdot (x^2 - 3y), \quad f'_2(x, y) = 3y^2 - 9x = 3 \cdot (y^2 - 3x)$$

Alttså:

$$0 = x^2 - 3y$$

$$3y = x^2$$

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

$$0 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 - 3x, \quad x=0 \text{ er den første løsning.}$$

$$0 = \frac{1}{9}x^4 - 3x$$

$$0 = x^4 - 27x$$

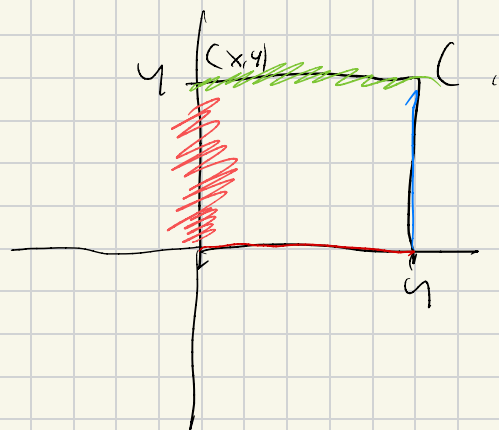
$$0 = x \cdot (x^3 - 27), \quad x \neq 0$$

$$x^3 = 27$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3, \quad y = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

De indre kritiske punkter er således $(3, 3)$ og $(0, 0)$. Vi undersøger

runder på måder:



$$\text{/// } f(x, 0), x \in [0, 4] = x^3 + 27, \quad \text{min: } x=0, \quad \text{max: } x=4.$$

$$\text{/// } f(4, y), y \in [0, 4] = 64 + y^3 - 9 \cdot 4 \cdot y + 27 = y^3 - 36y + 91 = \gamma(y)$$

$$\gamma'(y) = 3y^2 - 36 \Leftrightarrow y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \sqrt{12}. \quad \text{Mulige punkter}$$

har er $(4, 0)$, $(4, \sqrt{12})$ og $(4, 4)$.

$$\text{/// } \underset{x \in [0, 4]}{f(x, 4)} = x^3 + 64 - 9 \cdot 4 \cdot x + 27 = x^3 - 36x + 91 = \gamma(x).$$

$$\gamma'(x) = 3x^2 - 36. \quad \text{Mulige ekstrem: } (0, 4), (\sqrt{12}, 4), (4, 4)$$

$$\text{/// } f(0, y), y \in [0, 4] = y^3 + 27. \quad \text{Mulige ekstrem: } (0, 0), (0, 4)$$

Alttså er de mulige ekstrem:

$$f(3, 3) = 27 + 27 - 9 \cdot 9 + 27 = 0 \rightarrow \text{min}$$

$$f(0, 0) = 27$$

$$f(4, 0) = 91$$

$$f(0, 4) = 91$$

$$f(4, \sqrt{12}) = f(\sqrt{12}, 4) = 7, 7$$

$$f(4, 4) = 11$$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ defined on $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Først undersøges de indre kritiske punkter:

$$f_1'(x, y) = 2x - 1, \quad f_2'(x, y) = 4y$$

Heraf følger, at $x=1$ og $y=0$ ($\frac{1}{2}, 0$) er de eneste indre løsninger.

Randpunktene findes ved at betragte punkterne på mængden $x^2 + y^2 = 1$. Dette er en cirkel med radius $\sqrt{1}$ og centrum i origo.

$$\text{Da: } y^2 = 1 - x^2$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2 \cdot (1 - x^2) - x = x^2 + 2 - 2x^2 - x \\ &= -x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

$$g'(x) = -2x - 1$$

$$1 = -2x$$

$$-\frac{1}{2} = x$$

$$y^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Samtidig er $-x^2 - x + 2$ en aftagende funktion af x , hvorfor $x=1, y=0$ og $x=-1, y=0$ også er mulige ekstrema. Altså:

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{min}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \frac{9}{4} \rightarrow \text{max}$$

$$f(1, 0) = 0$$

$$f(-1, 0) = 2$$

