

Note om lineær algebra på Matematik B

Levi van Boekel

5. maj 2024

Resumé

Noten har til formål at belyse de centrale emner indenfor lineær algebra, der gennemås i Matematik B, på en intuitiv og letforståelig måde. Brugen af symboler og tunge definitioner holdes ved det absolutte minimum, mens der i højere grad er fokus på den intuitive forståelse af emnet. Det er mit håb, at noten kan bidrage til en mere dybdegående forståelse af de grundlæggende mekanismer indenfor lineær algebra, herunder særligt matricer som lineære transformationer og hvordan denne indsigt får de andre emner til at falde på plads mere intuitivt. Noten er kreeret på baggrund af videoserien *The Essence of Linear Algebra* af *3Blue1Brown*, samt pensumbøgerne i Matematik B og forelæsningslides i Matematik B (af Thomas Jensen). Det tages forbehold for, at der med overvejende sandsynlighed vil være enkelte fejl/ikke 100% stringente matematiske udtalelser.

Indhold

1	Introduktion til vektorer og matricer	4
1.1	Grundlæggende om vektorer og vektorrum	4
1.2	Vektorer som lineære kombinationer	4
1.2.1	Bestemmelse af spænd (regneeksempel)	5
1.3	Matricer som lineære transformationer	6
1.4	Determinanter	8
1.4.1	Determinanter af 2x2 matricer	9
1.4.2	Determinanter af 3x3 matricer (Saurus regel)	9
1.4.3	Determinanter af NxN matricer (kofaktorudvikling/Laplace udvikling)	9
1.4.4	Determinanter af NxN matricer (rækkeoperationer)	10
1.5	Lineære ligningssystemer	11
1.6	Lineære ligningssystemer, 3x3 (3 løsninger)	12
1.7	Lineære ligningssystemer, 3x3 (2 løsninger, 1 fri variabel)	12
1.8	Inverse matricer	13
1.8.1	Bestemmelse af invers matrice (regneeksempel)	14
1.9	Eigenverdier- og vektorer	15
1.10	Eigenverdier- og vektorer (regneeksempel)	17
1.11	Transponering	19
1.12	Rang	19
1.12.1	Rang (regneeksempel)	20
1.12.2	Rang (regneeksempel)	20
1.13	Diagonalisering	21
1.13.1	Diagonalisering (regneeksempel)	22
1.14	Spektral teoremet for symmetriske matricer	23
1.15	Kvadratiske former og definitthed	24
1.15.1	Principal minor og leading principal minor	25
1.15.2	Definitthed af kvadratiske former	26

Denne side er med vilje efterladt uden indhold.

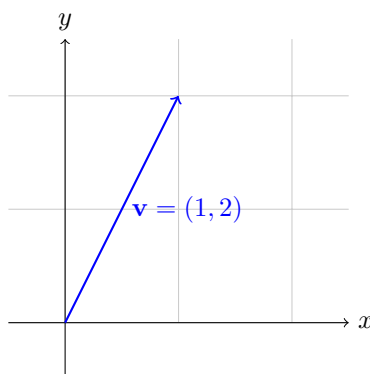
1 Introduktion til vektorer og matricer

1.1 Grundlæggende om vektorer og vektorrum

En af de vigtigste elementer i lineær algebra er vektorer, som mange af os kender fra gymnasiet. Dvs.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Den umiddelbare fortolkning heraf afhænger af ens akademiske felt, men i tilfælde af undervisningen i Matematik B forestiller vi os dem oftest som bevægelser langs akserne. Vektoren $\mathbf{v} = (1, 2)$ kan da opfattes som en bevægelse langs x- og y-aksen (hhv. +1 langs x-aksen og +2 langs y-aksen). Altså:



For at vektorer udgør et såkaldt vektorrum, skal vektoraddition og skalarmultiplikation være defineret. De behøves ikke være som nedenfor, hvis rummet f.eks. består af funktioner. I Matematik B vil det imidlertid altid følge nedenstående definitioner. Det bemærkes, at negative værdier af s ved beregning af prikproduktet skal fortolkes som at vende den givne vektors retning 180 grader.

$$\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$s \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} s \cdot (x_1) \\ s \cdot (y_1) \end{bmatrix} \quad (3)$$

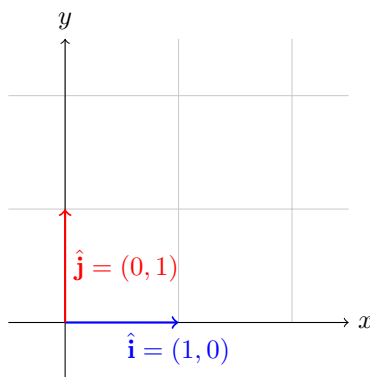
Oftest vil prikproduktet også være defineret, hvilket gør vektorrummet til et såkaldt indre produktrum (Hilbert rum). Prikproduktet er givet ved:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (4)$$

I Matematik B vil man i stort set alle tilfælde betragte et indre produktrum. For både vektor- og indre produktrum skal der desuden gælde 10 aksiomer, der ikke gennemgås i denne note.

1.2 Vektorer som lineære kombinationer

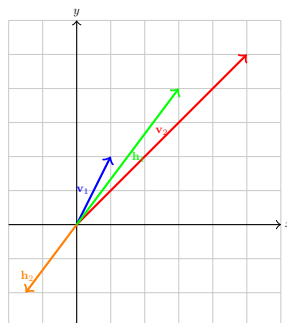
Det traditionelle x-y koordinatsystem er centreret omkring to specielle vektorer, $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$, der er defineret som enhedsvektorerne i hhv. x og y . Dvs:



Heraf følger det, at x - og y -koordinaterne af alle vektorer kan opfattes som skalarer af enhedsvektorerne. F.eks. kan vektoren $\mathbf{v} = (1, 2)$ opfattes som $\mathbf{v} = 1 \cdot \hat{\mathbf{i}} + 2 \cdot \hat{\mathbf{j}}$.¹ Denne operation kaldes for en lineær kombination af de to vektorer, og er grundlæggende *lineær*, fordi enhedsvektorerne udspænder to rette linjer, når de ganges med alle skalarer i $\mathbb{R}$. Hvis produktet af skalaerne og enhedsvektorerne ikke er kollineære (ikke ligger på den samme rette linje), vil spændet af disse skalerede enhedsvektorer udgøre hele det to-dimensionale vektorrum, $\mathbb{R}^2$. Omvendt, hvis produktet af skalaerne og enhedsvektorerne er lineært afhængige (dvs. ligger på en ret linje eller en kan udtrykkes som en skalar gange den anden), vil deres span være den rette linje, de ligger på. Afslutningsvis, hvis produktet af skalaerne og enhedsvektoren er nulvektoren, vil deres span kun indeholde nulvektoren, hvilket teknisk set er et 0-dimensionalt undervektorrum af $\mathbb{R}^2$. Tilsvarende kan spændet af vektorer defineres i n -dimensioner, hvilket dog overlades til eksisterende litteratur, idet det ikke ligger indenfor fokus.

1.2.1 Bestemmelse af spænd (regneeksempel)

Betragt følgende vektorer: $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$, $\mathbf{h}_1 = (3, 4)$ og $\mathbf{h}_2 = (-1.5, -2)$, der er tegnet nedenfor:



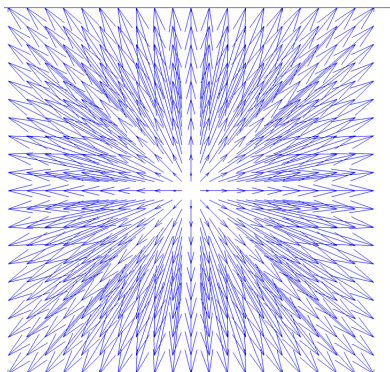
Det fremgår grafisk, at de to vektorer $\mathbf{h}_1$ og $\mathbf{h}_2$ er lineært afhængige, hvorfor deres spænd udelukkende er den rette linje, der går igennem de to vektorer. De to andre vektorer er ikke lineært afhængige (og er ikke nulvektorer), hvorfor deres spænd er hele det to-dimensionale vektorrum, $\mathbb{R}^2$. Analytisk kan det også ses ved at indse, at $-0.5 \cdot \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$, hvorfor de to vektorer er lineært afhængige. Tilsvarende kan det ses, at de to øvrige vektorer ikke er lineært afhængige, fordi $1 \cdot x = 5$ kun løses af $x = 5$ og $2 \cdot 5 \neq 5$. Et mere direkte argument for at afgøre den lineære uafhængighed mellem $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er at undersøge forholdet mellem koordinaterne i vektorerne hver for sig. For $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ og $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ er forholdet mellem den første og den anden komponent i $\mathbf{v}_1$ $1 : 2$, mens det for $\mathbf{v}_2$ er $1 : 1$. Da disse forhold ikke er ens, kan $\mathbf{v}_2$ ikke udtrykkes som en skalar multiplikation af $\mathbf{v}_1$, hvilket igen bekræfter, at de to vektorer er lineært uafhængige.

¹Enhedsvektorerne kan man frit ændre, dog beskrives disse ændringer ikke i indeværende note.

1.3 Matricer som lineære transformationer

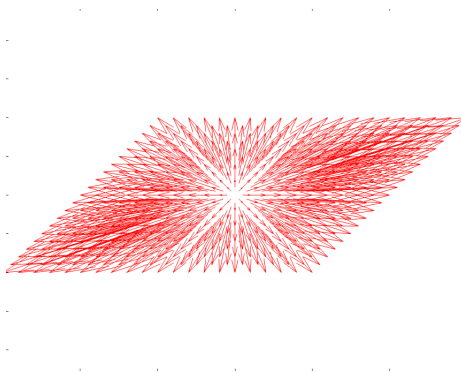
Lineære transformationer - og deres forhold til matricer - gennemsyrrer store dele af lineær algebra på Matematik B, men bliver, stort set, ikke nævnt en eneste gang i pensumbøgerne! Jeg tror, at det er undladt for at undgå forvirring, og strengt taget, er det heller ikke nødvendigt. Alligevel, har jeg selv nydt gavn af at anskue matricer som lineære transformationer, idet det har gjort det videre arbejde med determinanter, egenverdier, osv. meget mere intuitivt.

Grundlæggende, kan lineære transformationer ses som operationer, der *transformerer* alle vektorer i et koordinatsystem. Betragt f.eks. nedenstående 2D koordinatsystem med et udsnit af de mulige vektorer:



Figur 1: Udsnit af vektorer i 2D koordinatsystem

En lineær transformation vil i ovenstående tilfælde *transformere* alle vektorer til et nyt punkt ved at ændre deres længde, retning, eller begge dele, alt afhængigt af de specifikke transformation. En given lineær transformation af ovenstående er givet ved:



Figur 2: Transformerede vektorer i 2D koordinatsystem

Lineariteten af en transformation hidrører fra dens evne til at bevare addition og skalar multiplikation. Intuitivt kan det beskrives som om, at origo forbliver fast, linjerne fortsat er linjer, og gitterlinjerne forbliver parallelle og med uændret afstand. Derudover gælder der for en lineær transformation, at skæringspunkter mellem linjerne bevares (f.eks. forbliver parallelle linjer parallelle efter transformationen) Det betyder også, at hvis en vektor i det oprindelige rum kan udtrykkes som en lineær kombination af andre vektorer, vil det stadigvæk gælde efter transformationen. I Matematik B regnes der kun med lineære transformationer, og transformationen vist i figur 2 er selvsagt også lineær.

Af kravet om linearitet følger det, at effekterne af en sådan transformation kan undersøges ved blot af følge basisvektorerne, $\hat{i}$ og $\hat{j}$. Intuitionen er her, at basisvektorerne udgør *grundelementerne* af vektorrummet, og vi dermed kan udlede transformationen af ethvert andet element i vektorrummet.

Dette skyldes, at enhver vektor i rummet kan konstrueres som en lineær kombination af basisvektorerne. For eksempel, hvis en vektor $\mathbf{v}$ i det oprindelige rum kan udtrykkes som $a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$, og vi kender destinationen for $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ efter transformationen, kan vi netop bestemme den nye position af $\mathbf{v}$ ved at anvende den samme lineære kombination på de transformerede basisvektorer (idet linearkombinationerne forbliver ens før- og efter transformationerne).

Det vigtige at forstå er her, at matricer netop kan beskrive lineære transformationer og at begreber som matrix produktet, determinant, eigenverdier, m.m., bliver MEGET nemmere at forstå, hvis man har den visuelle intuition med. Betragt nedenstående matrix:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5)$$

Hvor den første kolonne beskriver, hvor $\hat{\mathbf{i}}$ lander, og den anden kolonne beskriver, hvor $\hat{\mathbf{j}}$ lander. Hvis vi f.eks. er interesseret i transformationens effekt på en vilkårlig vektor, $\mathbf{v} = (x, y)$, skal vi jo netop bare huske tilbage til, at den vektoren kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne, dvs. $(\mathbf{v} = x \cdot \hat{\mathbf{i}} + y \cdot \hat{\mathbf{j}})$, og disse stadigvæk gælder efter transformationen. Derfor kan koordinaterne af den transformerede matrix jo netop findes ved den samme linearkombination, altså:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad (6)$$

Som jo netop er definitionen på matrix produktet! Tilsvarende gælder det, hvis vi betragter kvadratiske matricer, omend der er lidt flere skridt. Altså:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \quad (7)$$

hvor der er sprunget et skridt over i udregningen, dvs følgende er ikke vist fire gange:

$$e \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg \\ ce + dg \end{bmatrix} \quad (8)$$

Intuitionen bag produktet af en kvadratisk matrix er, at man kombinerer to lineære transformationer i en enkelt operation, idet hver matrix repræsenterer en unik transformation. Tilsvarende kan man også danne matrixproduktet af f.eks. en 3x2 og en 2x2 matrice. Her er det igen værd at huske på, at hver matrice afspejler en lineær transformation, dvs. 3x2 matricen er i virkeligheden to selvstændige 3x1 matrice, der afspejler en lineær transformation i 3 dimensioner og 2x2 matricen er to selvstændige 2x1 matricer, der afspejler lineære transformationer i 2 dimensioner. Produktet af de to matricer kan derfor fortolkes ved at den to-dimensionelle transformation vist ved 2x2 matricen, projiceres ind i et tre-dimensionalt rum og yderligere transformeres ved værdierne i 3x2 matricen. Altså: vektorerne bliver projiceret i et tre-dimensionalt rum og herefter transformeret ved 3x2 matricen (selvom 2x2 jo allerede er en transformation). Ovenstående er vist for en vilkårlig 3x2 og 2x2 matrice nedenfor og kan simpelt generalisere til andre matricer, f.eks. 4x3 og 3x3...

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} \\
 &= b_{11} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + b_{12} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + b_{22} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Intuitivt giver det heraf også mening, at matrixproduktet mellem $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ kun er defineret, hvis antallet af kolonner i $\mathbf{A}$ er lig antallet af rækker i $\mathbf{B}$. Da udregningen jo netop kræver, at vi ganger en række fra $\mathbf{A}$ med en kolonne fra $\mathbf{B}$, hvilket intuitivt giver mening, fordi hver række fra $\mathbf{A}$ repræsenterer en *instruktion* for, hvordan en vektor skal kombineres - hvordan dens komponenter skal vægtes og lægges sammen - mens hver kolonne i $\mathbf{B}$ repræsenterer en *input* vektor, som instruktionerne skal anvendes på. Betragt f.eks. nedenstående 2x2 og 3x2 matrix, hvor det fremgår, at nogle operationer er udefinerede:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} + a_{31} \cdot ??? + \text{osv} \dots
 \end{aligned}$$

Hermed er det også vist, at matrixmultiplikation ikke er kommutativ, hvilket igen giver intuitivt mening, hvis man forestiller sig matricer som lineære transformationer, hvor det jo gør en forskel, hvilken transformation man *anvender* først. Afslutningsvis er der forneden vist en *oversigt*, der sammenfatter det beskrevne regneri og gør det muligt at beregne matrixprodukter hurtigt og effektivt.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}$$

1.4 Determinanter

Når en lineær transformation afbildet ved en matrix $\mathbf{A}$ transformerer enhver vektor $\vec{x}$ i rummet til en ny vektor $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x}$, vil arealerne i samme rum også blive skaleret. Fordi vi har at gøre med lineære transformationer, og gitterlinjerne forbliver parallelle og afstanden mellem dem ikke ændrer sig, kan ændringen af ethvert areal (2D) i rummet beskrives, hvis man ved, hvordan arealet, der udspændes af basisvektorerne bliver skalleret. Selve skaleringsfaktoren er definitionen på determinanten. Hvis f.eks. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er basisvektorer for et område i rummet, så vil området S udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ blive transformeret til et område S' med arealet $|\det(\mathbf{A})| \times \text{areal}(S)$. En determinant på 3 vil altså beskrive en lineær transformation, hvor alle arealer skales med 3, mens en determinant på 0.5 vil beskrive en lineær transformation, hvor alle arealer halveres. Afsluttende vil negative determinanter ændre

orienteringen i rummet, hvilket - løst sagt - betyder, at basisvektorerne ikke skifter placering ift. hinanden (hvis de skifter placering ift. hinanden kan transformationen f.eks. medføre, at $\hat{\mathbf{j}}$ er til højre for $\hat{\mathbf{i}}$). Intuitionen er den samme i 3 dimensioner, men bliver ikke gennemgået her.

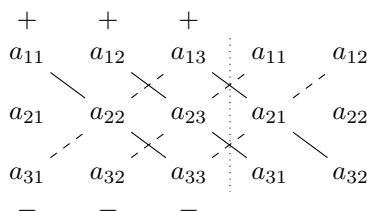
1.4.1 Determinanter af 2x2 matricer

2x2 matricer kan altid beregnes vha. nedenstående metode:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

1.4.2 Determinanter af 3x3 matricer (Saurus regel)

Til bestemmelse af determinanter af matricer af højere orden, er der straks flere regler, og det er ikke altid entydigt, hvilken der er mest hensigtsmæssig at benytte. I tilfælde af en 3x3 matrice (og kun i det tilfælde), hvor determinant ganske enkelt skal bestemmes, kan Saurus regel, som vist nedenfor, give en hurtig og overskuelig beregningsmetode. I tilfælde af egenværdier, hvor man skal finde rødder i et polynomium, der er givet ved determinanten, er det ikke nødvendigvis hensigtsmæssigt, idet Saurus regel ikke i samme grad giver mulighed for elegant faktorisering. Reglen er visualiseret nedenfor:



hvor determinanten er givet ved: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

1.4.3 Determinanter af NxN matricer (kofaktorudvikling/Laplace udvikling)

Givet en matrix vilkårlig NxN matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Kan determinanten af A , beregnes vha. Laplace udvikling langs en hvilken som helst række. Oftest vælges den række, hvor der er flest 0'er, fordi man her ikke skal regne underdeterminanterne. Fordi der ikke er nogle 0'ere i A udvikles langs den første række. Dvs:

$$\det(A) = a \cdot C_{11} + b \cdot C_{12} + c \cdot C_{13}$$

hvor C_{ij} er kofaktoren for element a_{ij} , defineret som:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

og M_{ij} er determinanten af submatricen, som opnås ved at fjerne række i og kolonne j fra A . For den første række i vores matrix bliver cofaktorerne:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = ei - fh$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} = -(di - fg)$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = dh - eg$$

Således bliver determinanten af A :

$$\det(A) = a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg)$$

1.4.4 Determinanter af NxN matricer (rækkeoperationer)

Afsluttende præsenteres en metode til at finde determinanter, der benytter sig af rækkeoperationer, der belyses nærmere i det næste afsnit. Formålet med rækkeoperationerne er, at omdanne en given matrice til øvre eller nedre trekantsform, idet determinanten her kan findes som produktet af alle elementer i diagonalen. Betragt matricen A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Følgende rækkeoperationer anvendes:

- Træk halvdelen af første række fra anden række for at gøre a_{21} til 0:

$$R2 = R2 - \frac{1}{2}R1$$

- Læg første række til tredje række for at gøre a_{31} til 0:

$$R3 = R3 + R1$$

Disse operationer omdanner A til:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Endnu en rækkeoperation:

- Træk det dobbelte af anden række fra tredje række for at gøre a_{32} til 0:

$$R3 = R3 - 2R2$$

Den øvre trekantsmatrice, A'' , er nu:

$$A'' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

Determinanten af A er da blot diagonalelementerne i A'' , svarende til:

$$\det(A) = \det(A'') = 2 \times 1 \times (-11) = -22$$

Intuitionen bag, hvorfor ovenstående gælder er, at det kun er diagonalelementerne i en øvre eller nedre trekantsmatrix, der bidrager til "volumenet/arealet" af det rum, vektorerne udspænder, fordi resten af elementerne enten over eller under diagonalen er nul. Heraf følger, at produktet af diagonalelementerne alene afspejler den samlede skaleringsfaktor af rummet, hvilket jo netop er det determinanten beskriver jf. 1.4.

1.5 Lineære ligningssystemer

En af de hyppigste anvendelser indenfor lineær algebra hidrører evnen til at løse lineære ligningssystemer af n -variable med stor effektivitet. Generelt gælder det, at systemer af ligninger kan omskrives til matriceform ved:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en koefficientmatrix, $\mathbf{x}$ er en kolonnevektor bestående af variable, og $\mathbf{b}$ er en kolonnevektor bestående af de konstante termer. Et eksempel kunne være løsningen af følgende system af lineære ligninger:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dette kan omskrives til matriceform som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Hvor den endelige matrice, man udfører rækkeoperationer på benævnes den augmenterede matrix og er givet ved:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Det kan desuden tilføjes, at der for et kvadratisk system af lineære ligninger (dvs., antallet af ligninger er lig med antallet af variable) gælder, at systemet har en unik løsning, hvis determinanten er forskellig fra 0. Det skyldes, at $\mathbf{A}$ her er invertibel (beskrives i 1.6), og løsningen kan findes ved $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, fordi $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

1.6 Lineære ligningssystemer, 3x3 (3 løsninger)

Betragt systemet af lineære ligninger:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Der kan repræsenteres ved den augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Systemet løses ved brug af rækkeoperationer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] &\xrightarrow{:2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{:2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{:2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{:1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Figur 3: Løsning vha. rækkeoperationer

1.7 Lineære ligningssystemer, 3x3 (2 løsninger, 1 fri variabel)

Betragt systemet af lineære ligninger:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -9 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Der kan repræsenteres ved den augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Systemet løses ved brug af rækkeoperationer:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{R_2 - 4R_1, R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 15 & -21 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & -3 & 15 & -21 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & -3 & 15 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{R_1 \cdot 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$x_3 = 4$ $2x_1 - 1 = -1$ $x_2 - 5t = 7$ $\Rightarrow$ $x_2 = 7 + 5t$
 $2x_1 = -1 + 1$
 $x_1 = \frac{-1+1}{2}$
 $x_1 = \frac{0}{2}$

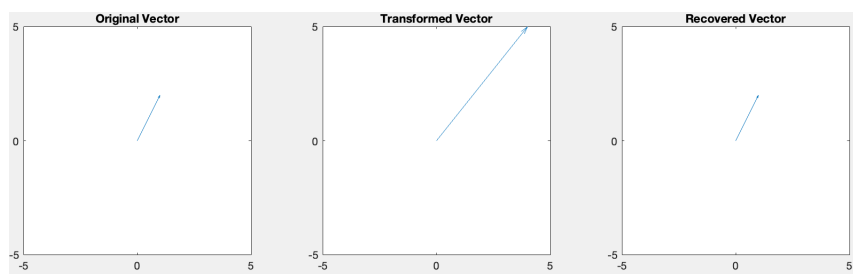
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ 7 + 5t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figur 4: Løsning vha. rækkeoperationer

1.8 Inverse matricer

Med vores viden om matricer - og deres evne til at *symbolisere* lineære transformationer - følger ideen om inverse matricer forholdsvis intuitivt. Det gælder nemlig, at den inverse matrice til en given matrice, $\mathbf{A}$, netop er den matrice, der tilbagefører den lineære transformation, som $\mathbf{A}$ har medført.

Betragt f.eks. nedenstående lineære transformation, der er givet ved matricen: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og vektoren, $\mathbf{v} = (1, 2)$. Matrixproduktet er vist nedenfor, og viser, hvordan $\mathbf{A}$ transformerer $\mathbf{v}$. Samtidig er resultatet af at gange med den inverse vist, dvs. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$. Men fordi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, er det jo netop det samme som $\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. I praksis vil $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^{-1}$ transformere alle punkter i rummet, men nedenfor er det kun vist for $\mathbf{v}$.



Figur 5: Visualisering af inverse matricer

På billedet sker der to transformationer, fra (1) $\rightarrow$ (2) og fra (2) $\rightarrow$ (3). Det første skridt, læst fra venstre, beskriver selve transformationen, hvor kolonnerne i matricen beskriver, hvordan basisvektorerne bliver transformeret. Fordi transformationen er lineær - og linearkombinationer forbliver - kan vi da skrive den transformeret vektor som:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \mathbf{v}' \quad (9)$$

Den inverse matrice til $\mathbf{A}$ skal altså nu opfylde den betingelse, at:

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

I praksis bestemmes den inverse på baggrund af rækkeoperationer, og metoden vil da også blive gennemgået i det følgende afsnit. Men for nu antages blot, at den inverse er givet ved nedenstående, hvor det gælder, at matrixproduktet er lig den oprindelige vektor.

$$\begin{bmatrix} 0.66 & -0.33 \\ -0.33 & 0.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0.66 \\ -0.33 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -0.33 \\ 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v} \quad (11)$$

En matrix $\mathbf{A}$ siges at være invertibel, hvis der eksisterer en sådan invers matrix $\mathbf{A}^{-1}$, at $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen. Det kan formelt vises, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en matrix er invertibel, er, at determinanten $\det(\mathbf{A})$ er forskellig fra 0. Intuitivt kan dette forstås således, at der kun eksisterer en invers til en lineær transformation repræsenteret ved $\mathbf{A}$, hvis den pågældende transformation ikke medfører, at alle punkter i rummet projiceres ned til en ret linje (hvor $\det(\mathbf{A}) = 0$) eller reduceres til et enkelt punkt (ligeledes hvor $\det(\mathbf{A}) = 0$). Årsagen til, at der i disse tilfælde ikke findes nogen invers, er, at der ikke eksisterer nogen lineære transformationer, der kan genskabe det oprindelige rum fra en ret linje eller et enkelt punkt.

For at finde den inverse af $\mathbf{A}$ ved hjælp af rækkeoperationer, opstilles først den augmented matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, hvor $\mathbf{A}$ er matrixen, der skal inverteres, og $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen af samme dimension som $\mathbf{A}$. Dvs.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \quad (12)$$

Dernæst anvendes rækkeoperationer for at reducere $\mathbf{A}$ til identitetsmatricen $\mathbf{I}$, samtidig med at de samme rækkeoperationer anvendes på $\mathbf{I}$ på højre side af den augmented matrix. Når $\mathbf{A}$ er reduceret til $\mathbf{I}$, vil matrixen på højre side af den augmented matrix være $\mathbf{A}^{-1}$. Dette resultat følger af, at rækkeoperationerne transformerer $\mathbf{A}$ til $\mathbf{I}$, samtidig med at de transformerer $\mathbf{I}$ til $\mathbf{A}^{-1}$, idet de reverserer den oprindelige transformation repræsenteret ved $\mathbf{A}$.

Det gælder desuden for en vilkårlig 2×2 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ er givet ved nedenstående, hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (13)$$

1.8.1 Bestemmelse af invers matrice (regneeksempel)

Betragt nedenstående matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

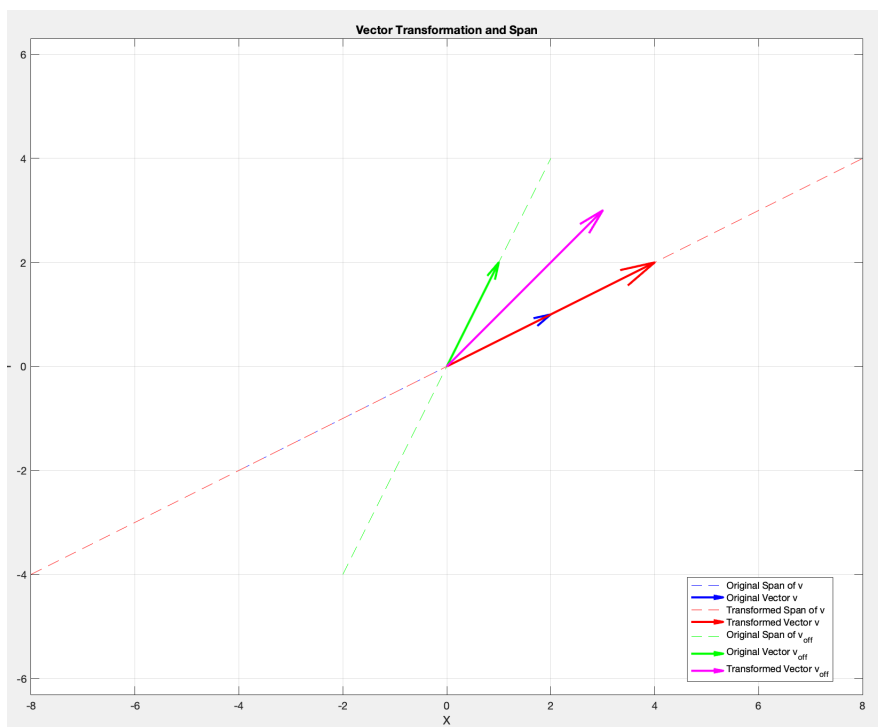
Den inverse bestemmes nedenfor vha. rækkeoperationerne beskrevet ovenfor:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{A^1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A^2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A^3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A^4}$$

Figur 6: Rækkeoperationer til bestemmelse af invers matrice

1.9 Eigenværdier- og vektorer

Betragt en vilkårlig matrice, der jf. det tidligere gennemgående, kan ses som en lineær transformation. Denne lineære transformation vil påvirke alle vektorer i rummet, men effekten på de individuelle vektorer er forskellig, og der er særligt en type vektorer - såkaldte egenvektorer - der bliver transformeret på unik vis. For disse egenvektorer gælder det, at den lineære transformation medfører, at selve vektorerne stadigvæk forbliver på den samme rette linje (spænd), og transformationen *kun* skalerer vektorernes længde med den tilhørende eigenværdi. I praksis er der ikke tale om en enkelt vektor, men alle tænkelige skalarer af vektorerne, der forbliver på deres spænd, der bliver skaleret med den samme eigenværdi. Intuitionen bag ovenstående er vist nedenfor, hvor den grønne vektor bliver transformeret til den lyserøde vektor, og dermed ikke er en egenvektor, da den forlader sit spænd. Omvendt, bliver den blå vektor transformeret til den røde vektor, og bliver på sit spænd, hvorfor den er en egenvektor. Eigenværdien er her skalar, dvs. $\lambda = 2$.



Figur 7: Visualisering af eigenværdier

Rent formelt gælder det siger vi, at:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (14)$$

hvor λ er eigenværdien tilhørende egenvektoren $\mathbf{v}$. Bestemmelsen af eigenværdier og egenvektorer er handler altså - i principper - bare om at isolere $\mathbf{v}$ og λ i ovenstående ligning. Det bemærkes dog, i første omgang, at venstre siden af lighedstegnet er et produkt af to matricer, mens højresiden

produktet af en skalar (λ) og en vektor. Derfor omskrives skalaren til:

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

dvs. $\lambda = \lambda \mathbf{I}$. Hvorfor (14) kan omskrives til:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

hvor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ er:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

Fordi der betragtes ikke-arbitrære løsninger (dvs. $\mathbf{v} \neq 0$), skal vi huske tilbage til, hvad matrix multiplikation i virkeligheden er; lineære transformationer. Og, når vi trækker λ gange identitetsmatricen I fra A , ændrer vi transformationen, således at egenvektorerne for A nu bliver sendt til nulvektoren. For alle andre vektorer vil denne ændrede transformation, $A - \lambda I$, flytte dem til forskellige punkter, men for egenvektorerne vil resultatet være nulvektoren. Hvis en given lineær transformation skal medføre, at den transformerende vektor ($\mathbf{v}$) skal være lig 0 (dvs. λ er en egenværdi), skal der gælde, at matricen $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ er ikke invertibel, hvilket jo netop vil sige, den lineære transformation *transformerer* vektoren ned til en mindre dimension - i dette tilfælde 0. Algebraisk kan det også ved, at betragte, hvad der sker, hvis $\mathbf{A}$ er invertibel, dvs:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} &= 0 \cdot (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \\ \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

...hvilket jo netop var den trivielle løsning, som vi ikke ville betragte. Altså skal det gælde, at matricen skal være ikke invertibel, hvilket jo netop svarer til, at determinanten er lig 0 — altså at den lineære transformation transformere alle vektorer til en linje eller et enkelt punkt. Egenværdiproblemet bliver da til:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (16)$$

Det gælder desuden, at $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$, hvilket intuitivt kan forstås som, at den samlede skalerings-effekt som matricen $\mathbf{A}$ har på rummet netop er lig med produktet af egenværdierne, fordi disse er et udtryk for, hvor meget egenvektorerne bliver skaleret. Altså; når vi betragter egenværdierne som målestokke for, hvordan hver tilhørende egenvektor bliver skaleret under transformationen ved $\mathbf{A}$, er produktet af disse egenværdier netop et udtryk for, hvordan *volumenet* (i en bred geometrisk forstand) af hele rummet ændres.

Når egenværdierne er fundet, bestemmes egenvektorerne ved at betragte:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

...idet egenverdierne jo netop er defineret til at løse ligning (14). Herefter kan det augmentedede matrice opstilles, som gjort nedenfor:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

Ved hjælp af rækkeoperationer kan ovenstående bringes på RREF-form, hvor løsningerne kan aflæses. Bemærk, ovenstående skal gøres for hver egenverdi.

1.10 Egenverdier- og vektorer (regneeksempel)

Betragt nedenstående matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ved at subtrahere $\lambda \mathbf{I}$ fås:

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Determinanten af ovenstående matrice bestemmes ved hjælp af Laplace udvikling langs den tredje række, hvor den anden række ikke medtages, fordi der står et 0. Dvs.

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 - \lambda & 1 \end{bmatrix} = 1 - (-1 \cdot (1 - \lambda)) = 2 \cdot (1 - \lambda) = 2 - \lambda$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)$$

Således bliver determinanten af $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = 2 \cdot (2 - \lambda) + (-2 - \lambda)(2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)$$

$$\mathbf{A} = (2 - \lambda) \cdot (2 + (-2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda))$$

Af nulreglen følger det, at $\lambda = 2$ er den første egenverdi, svarende til, at denne værdi skalerer alle tilhørende egenvektorer med 2. De øvrige egenverdier findes ved at betragte den anden parentes. Altså:

$$0 = (2 + (-2 - \lambda) \cdot (1 - \lambda))$$

$$0 = 2 + (-2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2)$$

$$0 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(1 + \lambda)$$

Heraf følger det, at de øvrige egenverdier er givet ved $\lambda = 0$ og $\lambda = -1$, svarende til en skalering på 0 og -1. De tilhørende egenvektorer findes ved at betragte 3 lineære ligningssystemer. Den augmentede matrice for det første ligningssystem for $\lambda = 2$ er:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2-2 & 0 \end{array} \right]$$

Som løses nedenfor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$2x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$
 $-x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3$
 $-x_2 = -x_3$

Figur 8: Egenvektor til $\lambda = 2$

...hvor egenvektoren er lig:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den anden egenvektoren (til $\lambda = 0$) bestemmes på tilsvarende vis nedenfor, hvor den augmentede matrice er:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Altså:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_1 - I_3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_1 - I_3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}I_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_1 - I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_3 + 2I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 = -2(-1) = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$
 $x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1$
 $x_3 = 0$

Figur 9: Egenvektor til $\lambda = 0$

...hvor egenvektoren er lig:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den sidste egenvektor (til $\lambda = -1$) udledes ikke her, men er lig:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det vil altså sige, at alle skalarer af $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ alene bliver skaleret af matricen $\mathbf{A}$, med hhv. 2, 0 og -1.

1.11 Transponering

At transponere en matrix $\mathbf{A}$ betyder - løst sagt - at bytte om på matrixens rækker og kolonner. For en given $m \times n$ -matrix $\mathbf{A}$, hvor elementet a_{ij} repræsenterer elementet i den i -te række og j -te kolonne, vil den transponerede matrix $\mathbf{A}^T$ være en $n \times m$ -matrix, hvor element a_{ij} fra $\mathbf{A}$ vil svare til element a_{ji} i $\mathbf{A}^T$. Antag f.eks., at vi har en matrix $\mathbf{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Dens transponerede $\mathbf{A}^T$ vil så være:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

I forhold til lineære transformationer, repræsenterer matrix-transponering en ændring af perspektivet: fra at transformere kolonnevektorer (dvs. $m \times 1$ vektorer) med $\mathbf{A}$ til at transformere rækkevektorer (dvs. $1 \times n$ vektorer) med $\mathbf{A}^T$.

1.12 Rang

Rangen af en matrix er det største antal lineært uafhængige kolonner (eller rækker) i en given matrix. Ranger fortæller dermed - løst sagt - hvor mange dimensioner af det oprindelige rum, der *bevarer information* under transformationen repræsenteret af matricen. Formelt kan rangen af en given matrix $\mathbf{A}$, noteret som $\text{rang}(\mathbf{A})$, findes ved at reducere matricen til en øvre- eller nedre trekantsmatrix og herefter tælle antallet af ikke nul rækker. Alternativt kan rangen findes ved at identificere den højeste orden af *minors* (determinanter af kvadratiske submatricer), der er forskellige fra 0. I praksis vil determinantmetoden være at foretrække i situationer, hvor der er rækker med mange nuller, mens rækkeoperationer er hensigtsmæssige i tilfælde af, at determinanterne er regnetunge at bestemme.

Det gælder desuden, at en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for, at et lineært ligningssystem har mindst en løsning er, at rangen af koefficient matricen, $\mathbf{A}$ er lig rangen af den augmented matrice, $\mathbf{A}_b$, dvs.:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ har en løsning } \iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_b) \quad (19)$$

1.12.1 Rang (regneeksempel)

Betragt matricen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Rangen bestemmes vha. *determinantmetoden* nedenfor:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \\ U_1 &= (1 \cdot 3 \cdot 11 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot 5) - (2 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3) \\ &= (33 + 6 + 140) - (42 + 5 + 132) = 179 - 179 = 0 \\ U_2 &= (2 \cdot 3 \cdot 11 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \cdot 5) - (3 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 11 \cdot 4 \cdot 3) \\ &= (66 + 9 + 35) - (63 + 10 + 33) = 40 - 40 = 0 \\ U_3 &= (2 \cdot 4 \cdot 11 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \cdot 2) - (3 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 11 \cdot 4 \cdot 1) \\ &= (88 + 3 + 14) - (84 + 4 + 11) = 77 - 77 = 0 \\ U_4 &= (2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2) - (3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 1) \\ &= (40 + 9 + 6) - (36 + 12 + 5) = 48 - 43 = 5 \\ U_1 &= 3 \cdot 1 - 7 \cdot 3 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Figur 10: Bestemmelse af rang vha. (under)determinanter

Det fremgår, at metoden er særdeles regnetung og derfor ikke er synderlig optimal i f.eks. eksamenssituationer. Den samme opgave løses nedenfor, hvor der benyttes rækkeoperationer til at omforme matricen til nedre trekantsform:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1,5 & 3,5 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} +1 \\ -1,5 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1,5 & 3,5 \\ 0 & 4,5 & 4,5 & 4,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4,5}} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1,5 & 3,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4,5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figur 11: Bestemmelse af rang vha. rækkeoperationer

Altså er rangen 2.

1.12.2 Rang (regneeksempel)

Betragt matricen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Matricen $\mathbf{D}$ er en diagonal matrice med egenverdierne på diagonalen:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Inversen af matrix $\mathbf{P}$ betegnes $\mathbf{P}^{-1}$ og opfylder:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$$

...hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen. Det er således ikke overraskende, at egenverdier- og vektorer dukker op i sammenhængen med diagonalisering, da disse jo netop opfylder, at egenvektorerne blot skaleres og ikke transformeres yderligere.

1.13.1 Diagonalisering (regneeksempel)

Betragt matricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenverdierne findes ved at betragte:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Den karakteristiske ligning bliver da $(1 - \lambda) \cdot (-\lambda) - 6 = 0$, som kan omskrives til: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Andengradsligningen løses ved først at betragte determinanten: $(-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-6)) = 1 + 24 = 25$ og herefter bruge løsningsformlen for andengradsligninger, dvs:

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} = 3 \wedge -2 \quad (21)$$

Eigenverdierne er altså $\lambda = 3$ og $\lambda = -2$. De tilhørende egenvektorer findes først for $\lambda = 3$, hvor:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$
 $x_2 = 1$

Figur 14: Bestemmelse af egenvektor ($\lambda = 3$)

dvs. egenvektoren er lig $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Egenvektoren hørende til $\lambda = -2$ bestemmes forneden:

Dvs. egenvektoren er $\mathbf{v}_2 = (2, -3)$. Disse er lineært uafhængige. $\mathbf{P}$ og $\mathbf{D}$ bliver da:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \\ x_2 = t \end{matrix}$$

Figur 15: Bestemmelse af egenvektor ($\lambda = -1$)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Den inverse til $\mathbf{P}$ findes ved at benytte

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{(-3) - 2} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Den diagonaliserede matrice er da givet ved $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, dvs:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \quad (23)$$

...hvilket er beregnet og vist nedenfor:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} - \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} + \frac{6}{5} & \frac{18}{5} - \frac{18}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} - \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figur 16: Bestemmelse af den diagonaliserede matrice

1.14 Spektral teoremet for symmetriske matricer

Lad $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ symmetrisk matrix, det vil sige $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, hvor $\mathbf{A}^T$ er den transponerede af $\mathbf{A}$. Så gælder det, at:

1. Alle egenværdier for $\mathbf{A}$ er reelle.
2. Egenvektorerne for $\mathbf{A}$, der svarer til forskellige egenværdier, er ortogonale (dvs. står vinkelret på hinanden).
3. $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres ved en orthogonal matrix $\mathbf{P}$, således at $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$, hvor $\mathbf{D}$ er en diagonal matrix med $\mathbf{A}$ s egenværdier på diagonalen, og kolonnerne i $\mathbf{P}$ er de normaliserede egenvektorer af $\mathbf{A}$.

Teoremet garanterer således, at symmetriske matricer diagonaliseres på en pæn måde, hvor den matrix, der bruges til at diagonalisere $\mathbf{A}$, er orthogonal, dvs. $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, og dens kolonner er de ortogonale (eller orthonormale, hvis de er normerede til 1) egenvektorer af $\mathbf{A}$.

For at normalisere vilkårlig vektor egenvektor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, skal vi dividere vektoren med dens norm. Normen af en vektor $\mathbf{v}$, betegnet $\|\mathbf{v}\|$, er givet ved:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Den normaliserede vektor $\hat{\mathbf{v}}$ er så givet ved:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

hvor

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{x_1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{x_2}{\|\mathbf{v}\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\mathbf{v}\|} \right)$$

Dette sikrer, at $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

1.15 Kvadratiske former og defnithed

En kvadratisk form i n variable er en funktion Q af formen:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{ij} x_i x_j \dots + a_{nn} x_n^2 \quad (24)$$

Hvis vi antager at $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $A = (a_{ij})_{n \times n}$, så følger det fra definitionen af matrixmultiplikation at:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

For at udtrykke en kvadratisk form med en symmetrisk matrix $\mathbf{A}$, fordeles ikke-diagonale konstanter a_{ij} jævnt mellem de symmetriske positioner i matrixen ved at gange dem med $\frac{1}{2}$. Så hvis $a_{ij} x_i x_j$ er et led i den kvadratiske form for $i \neq j$, vil a_{ij} og a_{ji} optræde i matrixen $\mathbf{A}$ som $\frac{a_{ij}}{2}$. Hermed sikres det, at udtrykket $x^T \mathbf{A} x$ genskaber den bevarer den oprindelige kvadratiske form. Et eksempel på en sådan kvadratisk form - der omskrives til matriceformat - er givet ved:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_1 x_3 + x_2^2 - 4x_2 x_3 + 8x_3^2$$

...der kan omskrives til:

$$Q = 3x_1^2 + 0x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 0x_2 x_1 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + 3x_3 x_1 - 2x_3 x_2 + 8x_3^2$$

Hvor det gælder, at $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ for:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Den generelle symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ for en kvadratisk form i variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ er givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} & \dots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} & \dots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

hvor a_{ij} er koefficienten for leddet $x_i x_j$ i den kvadratiske form, og for $i \neq j$, er koefficienterne i matrixen $\mathbf{A}$ givet ved $\frac{a_{ij}}{2}$ for at sikre symmetri.

1.15.1 Principal minor og leading principal minor

Betragt nedenstående matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

For denne matrice er principalminorerne determinanterne af alle mulige kvadratiske submatricer, herunder 1×1 , 2×2 , og selve 3×3 -matricen. 1×1 -principalminorer er selve elementerne på diagonalen:

- $\Delta_1 = a_{11}$
- $\Delta_2 = a_{22}$
- $\Delta_3 = a_{33}$

2×2 -principalminorer findes ved at tage determinanten af hver 2×2 -submatrice, hvor hver række med 1×1 principalminoren og den tilhørende kolonne slettes en af gangen. I den første 2×2 principalminor er række 3, kolonne 3 således slettet osv.:

- $M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $M_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3×3 -principalminoren er determinanten af hele matricen:

- $M_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

De førende Principalminorer er en særlig sekvens af principalminorer, der inkluderer:

- Den 1. førende principalminor: $\Delta_1 = a_{11}$
- Den 2. førende principalminor: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Den 3. førende principalminor: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Principalminorerne bruges til at bestemme en kvadratisk forms *definiteness*, der beskrives nærmere i det følgende afsnit.

1.15.2 Definitthed af kvadratiske former

En kvadratisk form $Q(\mathbf{x})$ og dens tilhørende symmetriske matrice $\mathbf{A}$ er...

- **positivt definit**, hvis $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **positivt semidefinit**, hvis $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$.
- **negativt definit**, hvis $Q(\mathbf{x}) < 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **negativt semidefinit**, hvis $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ for alle $\mathbf{x}$.
- **indefinit**, hvis de ledende principalminorer tiltager både positive og negative værdier.

Der er flere forskellige test til at afgøre en kvadratisk forms definitthed, den første tager udgangspunkt i de principal minors og leading principal minors, og er defineret som følger, hvor D_k henviser til leading principal minors og Δ_k henviser til en arbitrær principal minor:

- Q er **positivt definit**, hvis og kun hvis, alle $D_k > 0$ for $k = 1, \dots, n$.
- Q er **positivt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle $\Delta_k \geq 0$ for alle principalminorer af orden k .
- Q er **negativt definit**, hvis og kun hvis, $(-1)^k D_k > 0$ for $k = 1, \dots, n$.
- Q er **negativt semidefinit**, hvis og kun hvis, $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ for alle principalminorer af orden k .
- Q er **indefinit**, hvis der eksisterer vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så $Q(\mathbf{x})$ tager både positive og negative værdier.

Betragt igen følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Nedenfor bestemmes de enkelte ledende minors:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} = 3 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 \cdot 8) - (3 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) \cdot 3) \\ &= 24 - (9 + 12) = 3 \end{aligned}$$

Figur 17: Bestemmelse af definitthed vha. minors

I praksis er det ofte nemmere at bestemme definittheden af en kvadratisk form vha. dens egenværdier, hvor det gælder, at:

- Q er **positivt definit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenværdier af $\mathbf{A}$ er positive.
- Q er **positivt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenværdier af $\mathbf{A}$ er ikke-negative.
- Q er **negativt definit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenværdier af $\mathbf{A}$ er negative.

- (d) Q er **negativt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenverdier af $\mathbf{A}$ er ikke-positive.
- (e) Q er **indetermineret**, hvis $\mathbf{A}$ har både positive og negative (reelle) egenverdier.