

Formelsamling, Matematik B

Levi van Boekel

29. maj 2024

Resumé

Den følgende *formelsamling* har til formål at introducere de vigtigste koncepter i kurset Matematik B gennem såvel formler og eksempler (hvorfor ordet formelsamling i traditionel forstand er misvisende og sættes i kursiv). *Formelsamlingen* er udarbejdet med udgangspunkt i kursets lærebog (Further Mathematics For Economic Analysis, Sydsætter et al.) forelæsningsmateriale fra Thomas Jensen, samt *dialog* med CHATGPT-4. Der henvises til en tidligere udgivet note om lineær algebra på Matematik B for en dybere gennemgang af koncepterne indenfor dette område, selvom de vigtigste formler og koncepter også berøres i denne *formelsamling*.

— København, maj 2024

Indhold

1	Nyttige <i>tips og tricks</i>	4
1.1	Faktorisering af polynomier	4
1.2	Regneregler for potensfunktioner	4
1.3	Regneregler for differentiation	5
1.4	Regneregler for integration	5
1.5	Regneregler for logaritmer	6
1.6	Regneregler for determinanter	6
2	Lineær algebra	7
2.1	Matrix multiplikation	7
2.2	Determinanter	7
2.2.1	Ved Saurus regel for 3X3	8
2.2.2	Ved Laplaceudvikling for NxN matricer	8
2.2.3	Ved rækkeoperationer	9
2.3	Lineære ligningssystemer	10
2.4	Inverse matricer	12
2.5	Egenverdier	14
2.6	Egenvektorer	15
2.7	Transponering	16
2.8	Rang	17
2.9	Diagonalisering	18
2.10	Kvadratiske former og defintied	20
2.10.1	Principal minor og leading principal minor	20
2.10.2	Defintied af kvadratiske former	21
2.11	Lineær afhængighed	23
3	Analyse	24
3.1	Gradienter	24
3.2	Retningsafledte	25
3.3	Konkave og konvekse mængder	25
3.4	Hessematricen til bestemmelse af konkavititet og konveksitet	26
3.5	Nyttige resultater om konkave/konvekse funktioner	27
3.6	Quasikonkave- og konvekse funktioner	28
3.7	<i>Bordered</i> Hessematrice til beregning af quasikonkavititet	29
3.8	Lagrange problemet for n -variable	30
4	Integralregning	32
4.1	Dobbeltintegraler over <i>produktmængder</i>	32
4.2	Dobbeltintegraler over generelle mængder	33
5	Differensligninger	35
6	Differentialligninger	36
6.1	Løsning ved separation af de variable	36
6.2	Løsning ved <i>panserformlen</i>	37

Denne side er med vilje efterladt uden indhold.

1 Nyttige *tips og tricks*

1.1 Faktorisering af polynomier

Faktorisering af et polynomium indebærer at skrive det som et produkt af mindre polynomier. Betragt et vilkårligt andengradspolynomium

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Vi ønsker at finde to tal, m og n , der opfylder betingelserne:

$$m \cdot n = a \cdot c \quad \text{og} \quad m + n = b$$

Når disse tal er fundet, kan polynomiet skrives som:

$$P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

hvor α og β er rødderne af polynomiet, som kan findes ved hjælp af faktorisering eller kvadratisk formel. For f.eks. at faktorisere $\lambda^2 - \lambda - 2$ finder vi to tal, der multipliceres til -2 og summeres til -1. Disse tal er -2 og 1, så:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Alternativt kan diskrimantmetoden altid bruges. Her er;

$$D = b^2 - 4ac \tag{1}$$

Og:

$$S_1 \left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, 0 \right), \quad S_2 \left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, 0 \right) \tag{2}$$

1.2 Regneregler for potensfunktioner

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$$

$$\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

1.3 Regneregler for differentiation

Funktion	Afledet funktion
$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$
$a \cdot x + b$	a
k	0
$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

1.4 Regneregler for integration

Funktion	Stamfunktion
$f(x)$	$\int f(x) dx$
a	$a \cdot x$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

1.5 Regneregler for logaritmer

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (\text{Produktreglen})$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad (\text{Kvotientreglen})$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a) \quad (\text{Potensreglen})$$

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \quad (\text{Skift af basis})$$

$$\ln(e) = 1 \quad (\text{Naturlig logaritme af } e)$$

$$\ln(1) = 0 \quad (\text{Logaritme af 1})$$

$$\ln(e^x) = x \quad (\text{Logaritme af en potens af } e)$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad (\text{Ekspponentialform})$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{og} \quad e^{\ln(x)} = x \quad (\text{Inverse egenskaber})$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(a) \quad (\text{Logaritme af en rod})$$

1.6 Regneregler for determinanter

$$\det(A^T) = \det(A) \quad (\text{Transponering})$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (\text{Produktreglen})$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (\text{Invers matrix})$$

$$\det(cA) = c^n \det(A) \quad (\text{Skalering, hvor } A \text{ er en } n \times n \text{ matrix})$$

$$\det(I) = 1 \quad (\text{Identitetsmatrixen})$$

$$\text{Hvis } A \text{ har en nulrække eller nulsøjle, så er } \det(A) = 0$$

$$\text{Hvis to rækker eller to søjler i } A \text{ er ens, så er } \det(A) = 0$$

$$\text{Hvis } A \text{ er trekantet (øvre eller nedre), så er } \det(A) = \text{produktet af diagonalelementerne}$$

2 Lineær algebra

2.1 Matrix multiplikation

Matrixproduktet mellem **A** og **B** kun er defineret, hvis antallet af kolonner i **A** er lig antallet af rækker i **B**. Formlen er vist nedenfor, og kræver netop, at vi ganger en række fra **A** med en kolonne fra **B**, hvorfor førstnævnte må gælde.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \quad (3)$$

Hvilket for større matricer er givet ved:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}$$

Det gælder desuden, at: Lad A være en $n \times m$ matrix, og lad B være en $m \times k$ matrix. Produktet af A og B er en ny matrix C , som er en $n \times k$ matrix.

Eksempel 1: Beregning af matrix produkt

Betragt følgende matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvor matrixproduktet er givet ved:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 6 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 5 + 9 & 8 + 0 + 18 & 10 + 20 + 6 \\ 2 + 18 & 8 + 36 & 10 + 12 \\ 1 + 2 + 12 & 4 + 24 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 26 & 36 \\ 20 & 44 & 22 \\ 15 & 28 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Determinanter

Determinanter kan grundlæggende beregnes på 3 forskellige måder: (1) Saurus regel (gælder kun for 3x3), (2) Laplace udvikling og (3) ved rækkeoperationer. Alle tre løsningsmetoder gennemgås i det følgende.

2.2.1 Ved Saurus regel for 3X3

Saurus regel gælder **kun** for 3x3 matrixer tilsiger, at determinanten kan findes som:

$$\begin{array}{ccccc}
 + & + & + & & \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 - & - & - & &
 \end{array}$$

hvor determinanten er givet ved: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Eksempel 2: Beregning af determinant (Saurus regel)

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinanten kan nu beregnes som:

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) - (1 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 0) = -4 - (-32) = 28$$

2.2.2 Ved Laplaceudvikling for NxN matrixer

Givet en matrix vilkårlig NxN matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Kan determinanten af A , beregnes vha. Laplace udvikling langs en hvilken som helst række. Oftest vælges den række, hvor der er flest 0'er, fordi man her ikke skal regne underdeterminanterne. Fordi der ikke er nogle 0'ere i A udvikles langs den første række. Dvs:

$$\det(\mathbf{A}) = a \cdot C_{11} + b \cdot C_{12} + c \cdot C_{13}$$

hvor C_{ij} er kofaktoren for element a_{ij} , defineret som:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

og M_{ij} er determinanten af submatricen, som opnås ved at fjerne række i og kolonne j fra A . For den første række i vores matrix bliver cofaktorerne:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} = ei - fh$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} = -(di - fg)$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = dh - eg$$

Således bliver determinanten af A :

$$\det(\mathbf{A}) = a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg)$$

Eksempel 2: Beregning af determinant ved Laplace udvikling

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Det ses nemt, at laplaceudvikling langs den anden første eller anden række er oplagt. Her vælges den 2. række:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= -1^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + -1^{2+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + -1^{2+3} \cdot 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot ((0 \cdot 2) - (2 \cdot (-2))) + 0 - 4 \cdot ((4 \cdot (-2)) - 0 \cdot 1) \\ &= -4 + 32 = 28 \end{aligned}$$

2.2.3 Ved rækkeoperationer

Formålet med rækkeoperationerne er, at omdanne en given matrice til øvre eller nedre trekantsform, idet determinanten her kan findes som produktet af alle elementer i diagonalen. Et eksempel heraf gennemgås nedenfor.

Eksempel 3: Beregning af determinant ved rækkeoperationer

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ved hjælp af rækkeoperationer kan den *omformes* til en øvre trekantsmatrice;

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - \frac{1}{4}I} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - I} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

hvor determinanten produktet langs diagonalen:

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 28$$

2.3 Lineære ligningssystemer

Et lineært ligningssystem af formen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Kan omskrives til matriceform:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Hvor den endelige matrice, man udfører rækkeoperationer på benævnes den augmenterede matrix og er givet ved:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Det kan desuden tilføjes, at der for et kvadratisk system af lineære ligninger (dvs., antallet af ligninger er lig med antallet af variable) gælder, at systemet har en unik løsning, hvis determinanten er forskellig fra 0. Det skyldes, at $\mathbf{A}$ her er invertibel (beskrives i 1.6), og løsningen kan findes ved $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, fordi $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Eksempel 4 gennemgår en løsning af et ligningssystem, hvor der er **ikke** er nogle frie variable.

Det homogene ligningssystem har ikke trivielle løsninger netop, hvis determinanten af koefficientmatricen er lig med 0. Det betyder, at hvis determinanten af koefficientmatricen er 0, vil der være ikke trivielle løsninger, mens en determinant forskellig fra 0 angiver, at der kun er trivielle løsninger (og uendelig mange løsninger, hvor vi udtrykker variable som parametre).

Eksempel 4: Løsning af lineære ligningssystemer (ingen frie variable)

Betragt systemet af lineære ligninger:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Der kan repræsenteres ved den augmenterede matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Systemet løses ved brug af rækkeoperationer:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{-5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hvor løsningerne til ligningssystemet er:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Der kan også være tilfælde, hvor ligningssystemet har en fri variabel. Her kan det stadigvæk løses, blot skal den frie variabel udtrykkes som parameter. Eksempel 5 gennemgår et eksempel heraf.

Eksempel 5: Løsning af lineære ligningssystemer (1 fri variabel)

Betragt systemet af lineære ligninger:

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -9$$

$$2x_1 + x_2 - 6x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_3 = -1$$

Der kan repræsenteres ved den augmented matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Systemet løses ved brug af rækkeoperationer:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hvor løsningerne til ligningssystemet er:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = \frac{t-1}{2} \\ x_2 = 7 + 5t \\ x_3 = t \end{cases}$$

2.4 Inverse matrices

For at finde den inverse af $\mathbf{A}$ ved hjælp af rækkeoperationer, opstilles først den augmented matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, hvor $\mathbf{A}$ er matrixen, der skal inverteres, og $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen af samme dimension som $\mathbf{A}$. Dvs.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \quad (4)$$

Dernæst anvendes rækkeoperationer for at reducere $\mathbf{A}$ til identitetsmatricen $\mathbf{I}$, samtidig med at de samme rækkeoperationer anvendes på $\mathbf{I}$ på højre side af den augmentedede matrix. Når $\mathbf{A}$ er reduceret til $\mathbf{I}$, vil matricen på højre side af den augmentedede matrix være $\mathbf{A}^{-1}$. Dette resultat følger af, at rækkeoperationerne transformerer $\mathbf{A}$ til $\mathbf{I}$, samtidig med at de transformerer $\mathbf{I}$ til $\mathbf{A}^{-1}$, idet de reverserer den oprindelige transformation repræsenteret ved $\mathbf{A}$.

Det gælder desuden for en vilkårlig 2×2 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

at den inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ er givet ved nedenstående, hvis $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (5)$$

Eksempel 6: Beregning af invers til 3x3 matrice

Betragt følgende matrice:

Hvor det dobbeltjekkes nedenfor:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} & 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-\frac{2}{3}) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-\frac{2}{3}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.5 Egenverdier

Egenverdierne til en vilkårlige matrice kan findes ved:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (6)$$

hvor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ er:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

Eksempel 7: Beregning af egenverdier

Betragt nedenstående matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ved at subtrahere $\lambda \mathbf{I}$ fås:

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Determinanten kan nu findes ved Laplace udvikling langs den anden række, hvor det første led ikke medtages fordi der står et 0. Kofaktorerne (uden hhv. $1 - \lambda$ og 1) bliver til:

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = 1 \cdot ((2 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) - (-1 \cdot 2)) \\
 &= ((2 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) + 2) \\
 C_{23} &= (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -1 \cdot ((2 - \lambda) \cdot 0 - (1 \cdot 2)) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Hvorfor den samlede determinant bliver:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{A}) &= (1 - \lambda) \cdot ((2 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) + 2)) + 1 \cdot 2 \\
 &= (1 - \lambda) \cdot (-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 2)) + 2 \\
 &= (1 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4 + 2)) + 2 \\
 &= (1 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 2) + 2 \\
 &= \lambda^2 - 2 - \lambda^3 + 2\lambda + 2 \\
 &= \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2)
 \end{aligned}$$

Det kan ses, at $\lambda = 0$ er den første rod, hvorefter andengradsligningen løses nedenfor:

$$\begin{aligned}
 D &= 1^2 - (4 \cdot (-1) \cdot 2) = 1 + 8 = 9 \\
 x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\
 x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2
 \end{aligned}$$

Altså er egenværdierne: $\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 2$. Alternativt kunne udtrykket også være blevet faktoriseret, ved indledningsvist at gange med minus 1, så det bliver til: $(-\lambda^2 - \lambda - 2)$ og finde to tal, der ganget med hinanden giver $ac = -2$ (muligheder 1 og -2 eller -2 og 1) og herefter finde to tal, der tilsammen giver $b = -1$ (igen 1 og -2 eller -2 og 1), hvorfor det samlede udtryk kan skrives som:

$$-(\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1)$$

Hvilket er lettere at finde roden af.

2.6 Egenvektorer

Når egenværdierne er fundet, bestemmes egenvektorerne ved at betragte:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

...idet egenværdierne jo netop er defineret til at løse $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Herefter kan det augmentedede matrice opstilles, som gjort nedenfor:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda & 0 \end{array} \right] \quad (7)$$

Ved hjælp af rækkeoperationer kan ovenstående bringes på RREF-form, hvor løsningerne kan aflæses. Bemærk, ovenstående skal gøres for hver egenværdi.

Eksempel 8: Beregning af egenvektorer

Fra eksempel 7 har vi følgende egenvektorer: $\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 2$. Vi finder kun egenvektoren egen tilhørende til den første egenværdi i dette eksempel $\lambda = -1$;

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 1 & -1 \\ 0 & 1-(-1) & 1 \\ 2 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alle x_3
 ① $3x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$
 ② $2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{4}x_3$

Hvorfor egenvektorerne til $\lambda = -1$ er givet ved:

$$\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beregningen af de øvrige egenværdier efterlades til læseren.

2.7 Transponering

At transponere en matrix $\mathbf{A}$ betyder - løst sagt - at bytte om på matrixens rækker og kolonner. For en given $m \times n$ -matrix $\mathbf{A}$, hvor elementet a_{ij} repræsenterer elementet i den i -te række og j -te kolonne, vil den transponerede matrix $\mathbf{A}^T$ være en $n \times m$ -matrix, hvor element a_{ij} fra $\mathbf{A}$ vil svare til element a_{ji} i $\mathbf{A}^T$. Antag f.eks., at vi har en matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Dens transponerede $\mathbf{A}^T$ vil så være:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

For 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Transponeret:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Eksempel 9: Transponering af matrice

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Der transponeret bliver til:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Betragt desuden:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Hvor den transponerede matrice er A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2.8 Rang

Rangen af en matrix er det største antal lineært uafhængige kolonner (eller rækker) i en given matrice. Formelt kan rangen af en given matrix $\mathbf{A}$, noteret som $\text{rang}(\mathbf{A})$, findes ved at reducere matricen til en øvre- eller nedre trekantsmatrice og herefter tælle antallet af ikke nul rækker. Alternativt kan rangen findes ved at identificere den højeste orden af *minors* (determinanter af kvadratiske submatricer), der er forskellige fra 0. I praksis vil determinantmetoden være at foretrække i situationer, hvor der er rækker med mange nuller, mens rækkeoperationer er hensigtsmæssige i tilfælde af, at determinanterne er regnetunge at bestemme. En matrix siges at være **regulær**, hvis den er fuld rang, mens den benævnes **singulær**, hvis den ikke er af fuld rang.

Det gælder desuden, at en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for, at et lineært ligningssystem har mindst en løsning er, at rangen af koefficient matricen, $\mathbf{A}$ er lig rangen af den augmented matrice, $\mathbf{A}_b$, dvs.:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ har en løsning } \iff r(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_b \quad (8)$$

Et *framework* til *determinantmetoden* er givet ved:

1. **Identificer kvadratiske under-matricer:** For en given $m \times n$ matrice A , find alle kvadratiske under-matricer. En kvadratisk under-matrice har dimensionerne $k \times k$, hvor $k \leq \min(m, n)$.
2. **Beregn determinantene:** Beregn determinantene af alle kvadratiske under-matricer af forskellige størrelser k .
3. **Find den største ikke-nul determinant:** Start med under-matricer af størrelse $k \times k$, og arbejd ned til 1×1 matricer. Hvis du finder en $k \times k$ under-matrice, hvis determinant er forskellig

fra nul, så har matricen rangen k (hvis du har beregnet determinanten af alle højere ordner).

4. **Bestem rangen:** Den største værdi af k , hvor mindst én $k \times k$ under-matrice har en ikke-nul determinant, er rangen af matricen.

Eksempel 10: Beregning af rang vha. *determinantmetoden*

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Underdeterminanter, bestemmes nedenfor, hvor determinanten af den højeste orden er givet ved:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (7 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \cdot 2) \\ &= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 0 \end{aligned}$$

Altså er rangen **ikke** lig 3. Der betragtes nu en vilkårlig underdeterminant, hvor det kan ses, at determinanten er forskellig fra 0. F.eks:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$$

Det følger heraf, at rangen af matricen er lig 2.

Tilsvarende kan rangen bestemmes ved at omdanne den givne matrice eller en øvre eller nedre trekantsmatrice og tælle antallet af ikke nul rækker. Et eksempel er vist nedenfor:

Eksempel 11: Beregning af rang vha. rækkeoperationer

Betragt følgende matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Ved hjælp af rækkeoperationer kan den omformes til:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1, R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{9}R_2, \frac{2}{1}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da der er to ikke nul rækker (1 og 2) følger det, at rangen er lig 2.

2.9 Diagonalisering

En matrix $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres, hvis og kun hvis, der eksisterer en invertibel matrix $\mathbf{P}$ og en diagonal matrix $\mathbf{D}$ således at:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \iff \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

For at en matrix kan diagonaliseres skal den have n lineært uafhængige egenvektorer, hvor n er dimensionen af matricen. Matricen $\mathbf{P}$ er defineret til at have egenvektorerne som sine kolonner. Egenvektorerne skal dog være **normaliseret**, dvs. have længden 1. Det gøres ved:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

hvor $\|\mathbf{v}_i\|$ er længden af $\mathbf{v}_i$. Lad nu $v_1, \dots, v_n$ betegne de normaliserede vektorer. Så bliver $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Matricen $\mathbf{D}$ er en diagonal matrice med egenverdierne på diagonalen:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Det vigtige er her, at egenverdier- og vektorer *matcher* dvs. at hvis λ_1 står i første kolonne, skal v_1 også stå i første kolonne! Den inverse af matrix $\mathbf{P}$ betegnes $\mathbf{P}^{-1}$ og opfylder:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$$

...hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatricen.

Eksempel 12: Beregning af diagonaliseret matrice

Betragt følgende matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Med tilhørende egenverdier $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = 2$, hvorfor $\mathbf{D}$ bliver til:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerne er så:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

med længder:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{5}$$

De normaliserede egenvektorer er:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Hvorfor $\mathbf{P}$ kan skrives som:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

2.10 Kvadratiske former og definedhed

En kvadratisk form i n variable er en funktion Q af formen:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{ij} x_i x_j \dots + a_{nn} x_n^2 \quad (9)$$

Hvis vi antager at $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $A = (a_{ij})_{n \times n}$, så følger det fra definitionen af matrixmultiplikation at:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

For at udtrykke en kvadratisk form med en symmetrisk matrix $\mathbf{A}$, fordeles ikke-diagonale konstanter a_{ij} jævnt mellem de symmetriske positioner i matrixen ved at gange dem med $\frac{1}{2}$. Så hvis $a_{ij} x_i x_j$ er et led i den kvadratiske form for $i \neq j$, vil a_{ij} og a_{ji} optræde i matrixen $\mathbf{A}$ som $\frac{a_{ij}}{2}$. Hermed sikres det, at udtrykket $x^T \mathbf{A} x$ genskaber den bevarer den oprindelige kvadratiske form. Et eksempel på en sådan kvadratisk form - der omskrives til matriceformat - er givet ved:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_1x_3 + cx_2^2 - dx_2x_3 + ex_3^2$$

...der kan omskrives til:

$$Q = ax_1^2 + \frac{0}{2}x_1x_2 + \frac{b}{2}x_1x_3 + \frac{0}{2}x_2x_1 + cx_2^2 - \frac{d}{2}x_2x_3 + \frac{b}{2}x_3x_1 - \frac{d}{2}x_3x_2 + ex_3^2$$

Hvor det gælder, at $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ for:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Den generelle symmetriske matrix $\mathbf{A}$ for en kvadratisk form i variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ er givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} & \dots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} & \dots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

hvor a_{ij} er koefficienten for leddet $x_i x_j$ i den kvadratiske form, og for $i \neq j$, er koefficienterne i matrixen $\mathbf{A}$ givet ved $\frac{a_{ij}}{2}$ for at sikre symmetri.

2.10.1 Principal minor og leading principal minor

Betragt nedenstående matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

For denne matrice er principalminorerne determinanterne af alle mulige kvadratiske submatricer, herunder 1×1 , 2×2 , og selve 3×3 -matricen. 1×1 -principalminorer er selve elementerne på diagonalen:

- $\Delta_1 = a_{11}$
- $\Delta_2 = a_{22}$
- $\Delta_3 = a_{33}$

2×2 -principalminorer findes ved at tage determinanten af hver 2×2 -submatrice, hvor hver række med 1X1 principalminoren og den tilhørende kolonne slettes en af gangen. I den første 2×2 principalminor er række 3, kolonne 3 således slettet osv.:

- $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3×3 -principalminoren er determinanten af hele matricen:

- $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

De førende Principalminorer er en særlig sekvens af principalminorer, der inkluderer:

- Den 1. førende principalminor: $D_1 = a_{11}$
- Den 2. førende principalminor: $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- Den 3. førende principalminor: $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Principalminorerne bruges til at bestemme en kvadratisk forms *definit*, der beskrives nærmere i det følgende afsnit.

2.10.2 Definit af kvadratiske former

En kvadratisk form $Q(\mathbf{x})$ og dens tilhørende symmetriske matrice $\mathbf{A}$ er...

- **positivt definit**, hvis $Q(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **positivt semidefinit**, hvis $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$.
- **negativt definit**, hvis $Q(\mathbf{x}) < 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **negativt semidefinit**, hvis $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ for alle $\mathbf{x}$.

- **indefinit**, hvis der eksisterer vektorer $\mathbf{x}$ sådan at $Q(\mathbf{x})$ antager både positive og negative værdier.

Der er flere forskellige test til at afgøre en kvadratisk forms definitthed, den første tager udgangspunkt i de principal minors og leading principal minors, og er defineret som følger, hvor D_k henviser til leading principal minors og Δ_k henviser til en arbitrær principal minor:

- Q er **positivt definit**, hvis og kun hvis, alle $D_k > 0$ for $k = 1, \dots, n$.
- Q er **positivt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle $\Delta_k \geq 0$ for alle principalminorer af orden k .
- Q er **negativt definit**, hvis og kun hvis, $(-1)^k D_k > 0$ for $k = 1, \dots, n$.
- Q er **negativt semidefinit**, hvis og kun hvis, $(-1)^k \Delta_k \geq 0$ for alle principalminorer af orden k .
- Q er **indefinit**, hvis de ledende principalminorer tiltager både positive og negative værdier.

I praksis er det ofte nemmere at bestemme definittheden af en kvadratisk form vha. dens egenverdier, hvor det gælder, at:

- Q er **positivt definit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenverdier af $\mathbf{A}$ er positive.
- Q er **positivt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenverdier af $\mathbf{A}\mathbf{A}$ er ikke-negative.
- Q er **negativt definit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenverdier af $\mathbf{A}$ er negative.
- Q er **negativt semidefinit**, hvis og kun hvis, alle de (reelle) egenverdier af $\mathbf{A}$ er ikke-positive.
- Q er **indefinit**, hvis de ledende principalminorer tiltager både positive og negative værdier.

Eksempel 13: Beregning af definitthed for en kvadratisk form (indefinit)

Betragt følgende kvadratiske form:

$$Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$$

Den tilhørende matricer bliver til:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{2} & 0 \\ \frac{2}{2} & 1 & \frac{4}{2} \\ 0 & \frac{4}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvor de ledende principalminorer er:

$$D_3 = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 0 + 0 - (0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1) = 6 - 14 = -8$$

$$D_2 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$$

$$D_1 = 3$$

Hvor $(-1)^3 \cdot (-8) = 8$ og $(-1)^2 \cdot 2 = 2$ og $(-1)^1 \cdot 3 = -3$. Da de ledende underdeterminanter både er positive og negative, er den kvadratiske form indefinit.

Eksempel 14: Beregning af definitthed for en kvadratisk form (negativ semidefinit)

Betragt følgende kvadratiske form:

$$Q(x) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2$$

Med tilhørende symmetriske matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvor de ledende principalminorer er:

$$D_3 = (-1) \cdot (-9) \cdot (-2) + 0 + 0 - (-2 \cdot 9 \cdot -1) = -18 - 18 = -36$$

$$D_2 = 1 \cdot (-9) - 3 \cdot 3 = -18$$

$$D_1 = -1$$

Da de ledende *principalminors* ikke giver et entydigt svar, skal de øvrige principalminors bestemmes. Indledningsvis af første orden:

$$(-1)^1 \Delta_1^{(1)} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^1 \Delta_1^{(2)} = (-1) \cdot (-9) = 9$$

$$(-1)^1 \Delta_1^{(3)} = (-1) \cdot (-2) = 2$$

Herefter af anden orden:

$$(-1)^2 \Delta_2^{(1)} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} = -9 + 9 = 0$$

$$(-1)^2 \Delta_2^{(2)} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 + 0 = 2$$

$$(-1)^2 \Delta_2^{(3)} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = (-9) \cdot (-2) = 18$$

Og afsluttende af tredje orden (blot determinanten af hele matricen):

$$(-1)^3 \Delta_3^{(3)} = (-1) \cdot (-9) \cdot (-2) + 0 + 0 - (-2 \cdot 9 \cdot -1) = -18 - 18 = -36$$

Det følger altså, at alle principalminorer af orden k ($k = 1, 2, 3$) opfylder $(-1)^k \Delta_k \geq 0$, hvorfor $\mathbf{Q}$ er negativ semidefinit.

2.11 Lineær afhængighed

De n søjlevektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ i den $n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

hvor $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, er lineært uafhængige, hvis og kun hvis **determinanten er forskellig fra 0**.

Det gælder desuden, at de n vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er **lineært afhængige**, hvis der findes tal $c_1, c_2, \dots, c_n$, ikke alle nul, sådan at

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n = 0$$

Hvis denne ligning kun gælder i det "trivielle" tilfælde, når $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, så er vektorerne **lineært uafhængige**.

Eksempel 27: Beregning af lineær afhængighed

Vi betragter vektorerne:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og opstiller matricen som ovenfor:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi bestemmer determinanten til:

$$\det(A) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Det følger heraf, at vektorerne $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ er lineært afhængige.

3 Analyse

3.1 Gradienter

En gradient er defineret som en vektor, der indeholder alle partielt afledte og dermed peger i retning af den stejleste stigning af den givne funktion. Gradientens længde er et udtryk for, hvor hurtigt funktionen ændrer sig i netop denne retning. For en funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ af flere variable er gradienten af f defineret som:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Eksempel 15: Beregning af gradienter

Betragt funktionen:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

Den partielle afledte mht x er her:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy + y^2) = 6x + 2y$$

Mens den partielt afledte mht. y er:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy + y^2) = 2x + 2y$$

Gradienten bliver derfor:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (6x + 2y, 2x + 2y)$$

3.2 Retningsafledte

Den retningsafledte af en funktion i retningen af en given vektor angiver ændringsraten af funktionen i netop denne specifikke retning. Den retningsafledte beregnes ved at tage prikproduktet af gradienten af funktionen og enhedsvektoren (**normaliseret til længden 1**) i den ønskede retning. For funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ med tilhørende enhedsvektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, er den retningsafledte af f i retningen af $\mathbf{u}$ defineret som:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i$$

Eksempel 16: Beregning af den retningsafledte

Betragt igen funktionen:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

og en vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Først skal vi normalisere vektoren $\mathbf{u}$ for at få en enhedsvektor:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Gradienten af f er (som vist i eksempel 16):

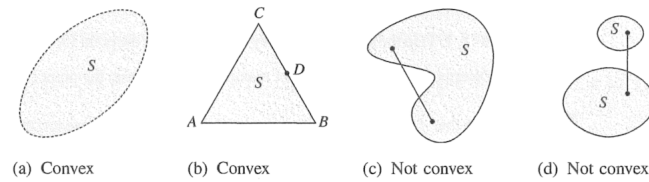
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (6x + 2y, 2x + 2y)$$

Den retningsafledte i retningen af $\mathbf{u}$ er derfor:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (6x+2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (2x+2y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(6x+2y+2x+2y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8x+4y) = \frac{8x+4y}{\sqrt{2}}$$

3.3 Konkave og konvekse mængder

En mængde er — løst sagt — konveks, hvis alle punkter i mængden kan forbindes vha. et linjestykke indenfor mængden, mens en mængde — løst sagt — er konkav, hvis punkterne i mængden **ikke** kan forbindes vha. et linjestykke indenfor mængden. Se nedenstående for en illustration heraf:



Figur 1: Visualisering af konvekse og konkave mængder

3.4 Hessematrixen til bestemmelse af konkavitæet og konveksitet

Hessematrixen for en funktion af n -variable er givet ved:

$$\begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Lad $z = f(x, y)$ være en C^2 -funktion defineret på et åbent konvekst område S i planen så gælder det, at;

- (a) f er konveks $\iff f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0$, og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.
- (b) f er konkav $\iff f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0$, og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.
- (c) $f''_{11} > 0$ og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \implies f$ er strengt konveks.
- (d) $f''_{11} < 0$ og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0 \implies f$ er strengt konkav.

Man kan desuden bruge hessematrixen til at afgøre, hvorvidt der er tale om minima, maksima, eller stationære punkter. Her er formelen:

- (a) f har et lokalt minimum $\iff f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0$, og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.
- (b) f har et lokalt maksimum $\iff f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0$, og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$.
- (c) f har et strengt lokalt minimum $\implies f''_{11} > 0$ og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$.
- (d) f har et strengt lokalt maksimum $\implies f''_{11} < 0$ og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$.
- (e) f har et sadelpunkt $\implies f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 < 0$.

Eksempel 17: Anvendelse af Hessematrixen (2 variable)

Betragt funktionen:

$$f(x, y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$$

De første ordens afledte er givet ved:

$$\begin{aligned} f'_1 &= 2 - 2x + 2y \\ f'_2 &= -1 + 2x - 2y \end{aligned}$$

Mens de andenordensafledte er:

$$\begin{aligned}f'_{11} &= -2 \\f'_{22} &= -2 \\f'_{21} &= f'_{12} = 2\end{aligned}$$

Hessematricen bliver da:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvor determinanten er $(f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2)$ er givet ved: $4 - 4 = 0$ og $f''_{11} < 0$. Det følger derfor af (b) i ovenstående, at $f(x, y)$ er konkav.

For en funktion af n -variable, kan man benytte resultaterne fra kvadratiske former til at afgøre konveksitet og konkaviteten.

Lad $D_r(\mathbf{x})$ være defineret ved (8), hvor D_r angiver de ledende *principal minors* og Δ angiver alle *principal minors*. Disse er defineret i afsnittet om kvadratiske former. Da gælder det:

- (a) $D_r(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $r = 1, \dots, n \implies f$ er strengt konveks på S .
- (b) $\Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $\Delta_r(\mathbf{x}), r = 1, \dots, n. \iff f$ er konveks i S
- (c) $(-1)^r D_r(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $r = 1, \dots, n \implies f$ er strengt konkav på S .
- (d) $(-1)^r \Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $\Delta_r(\mathbf{x}), r = 1, \dots, n. \iff f$ er konkav i S

Eksempel 18: Anvendelse af Hessematricen (n -variable)

Betragt følgende Hessematrice, hvor $u = x_1 + x_2 + x_3$:

$$\begin{bmatrix} -4 - e^u & -1 - e^u & -e^u \\ -1 - e^u & 2 - e^u & -e^u \\ -e^u & -e^u & -e^u \end{bmatrix}$$

De tre ledende underdeterminanter er:

$$\begin{aligned}D_1 &= -4 - e^u \\D_2 &= \begin{bmatrix} -4 - e^u & -1 - e^u \\ -1 - e^u & 2 - e^u \end{bmatrix} = 7 + 4e^u \\D_3 &= \begin{bmatrix} -4 - e^u & -1 - e^u & -e^u \\ -1 - e^u & 2 - e^u & -e^u \\ -e^u & -e^u & -e^u \end{bmatrix} = -7e^u\end{aligned}$$

Da $D_1 \cdot (-1)^1 > 0$, $D_2 \cdot (-1)^2 > 0$ og $D_3 \cdot (-1)^3 > 0$, følger det af (c), at funktionen tilhørende hessematricen er strengt konkav.

3.5 Nyttige resultater om konkave/konvekse funktioner

Det gælder generelt, at konvekse og konkave funktioner bevarer deres konkaviteten eller konveksitet under lineære kombinationer. Hvis $f_1, \dots, f_m$ er funktioner defineret på en konveks mængde S i

$\mathbb{R}^n$, vil det således gælde at:

- (a) Hvis $f_1, \dots, f_m$ er konkave og $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0$, så er $a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ konkav.
- (b) Hvis $f_1, \dots, f_m$ er konvekse og $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0$, så er $a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ konveks.

Eksempel 18: Bevarelse af konkaviteten under lineære transformationer

Lad os antage, at vi har to funktioner f_1 og f_2 defineret på et konvekst område S i $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x, y) = -x^2 - y^2$$

$$f_2(x, y) = -2x^2 - 3y^2$$

Begge funktioner er konkave (det vises ikke i det følgende). Lad os nu tage en lineær kombination af disse funktioner med positive koefficienter a_1 og a_2 :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

Så den lineære kombination er:

$$g(x, y) = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) = (-x^2 - y^2) + (-2x^2 - 3y^2)$$

$$g(x, y) = -3x^2 - 4y^2$$

Ifølge sætningen er den lineære kombination $g(x, y)$ konkav, da f_1 og f_2 er konkave og a_1 og a_2 er positive.

På samme måde er der en sætning for sammensatte funktioner. Antag, at $f(\mathbf{x})$ er defineret for alle $\mathbf{x}$ i et konvekst område S i $\mathbb{R}^n$, og at F er defineret over et interval i $\mathbb{R}$, som indeholder $f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x}$ i S . Da gælder:

- (a) $f(\mathbf{x})$ konkav, $F(u)$ konkav og voksende $\Rightarrow U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ konkav.
- (b) $f(\mathbf{x})$ konveks, $F(u)$ konveks og voksende $\Rightarrow U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ konveks.
- (c) $f(\mathbf{x})$ konkav, $F(u)$ konveks og aftagende $\Rightarrow U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ konveks.
- (d) $f(\mathbf{x})$ konveks, $F(u)$ konkav og aftagende $\Rightarrow U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ konkav.

Eksempel 18: Bevarelse af konkaviteten ved sammensatte funktioner

Betragt funktionen:

$$g(x, y, z) = e^{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

Vi ved, at e^x er konveks, og idet $F(u) = ax^2 + by^2 + cz^2$ ligeledes er konveks og voksende (fordi $a, b, c > 0$) følger det, at $g(x, y, z) = F(f(x))$ også er konveks.

3.6 Quasikonkave- og konvekse funktioner

Definitionen af quasikonkave- og konvekse funktioner er givet ved:

- En funktion f , defineret over et konvekst område $S \subseteq \mathbb{R}^n$, er **quasikonkav** hvis det øvre niveau-mængde $P_a = \{\mathbf{x} \in S : f(\mathbf{x}) \geq a\}$ er konveks for hver værdi a .

- Vi siger, at f er **quasikonveks** hvis $-f$ er quasikonkav. Så f er quasikonveks hvis det nedre niveau-mængde $P^a = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq a\}$ er konveks for hver værdi a .

Hvor det gælder, at:

- Hvis $f(\mathbf{x})$ er konkav, så er $f(\mathbf{x})$ quasikonkav.
- Hvis $f(\mathbf{x})$ er konveks, så er $f(\mathbf{x})$ quasikonveks.

Summen af quasikonkave funktioner er dog ikke nødvendigvis konkav. Lad nu $f(\mathbf{x})$ være defineret på et konvekst område S i $\mathbb{R}^n$, og lad F være en funktion af én variabel, hvis definitions-mængde inkluderer $f(S)$. Da gælder:

- Hvis $f(\mathbf{x})$ er quasikonkav (quasikonveks) og F er voksende, så er $F(f(\mathbf{x}))$ quasikonkav (quasikonveks). Hvis F er konkav (konveks) og voksende, vil det endda gælde, at den sammensatte funktion er konkav (konveks).
- Hvis $f(\mathbf{x})$ er quasikonkav (quasikonveks) og F er aftagende, så er $F(f(\mathbf{x}))$ quasikonveks (quasikonkav). Hvis F er konkav (konveks) og aftagende, vil det endda gælde, at den sammensatte funktion er konveks (konkav).

Eksempel 19: Bevarelse af konkaviteten ved sammensatte funktioner

Betragt funktionen:

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \quad (12)$$

Det ses nemt, at $-x^2 - y^2$ er en konkav og dermed også quasikonkav, og idet e^x er strengt voksende, følger det, at $f(x, y) = F(f(x, y))$ fortsat er quasikonkav.

Det gælder desuden, at Cobb-Douglas funktionen $z = Ax_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, defineret for $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, med A og $a_1, \dots, a_n$ positive, er homogen af grad $a = a_1 + \cdots + a_n$, og:

- quasikonkav for alle $a_1, \dots, a_n$;
- konkav for $a \leq 1$;
- strengt konkav for $a < 1$.

3.7 Bordered Hessematrix til beregning af quasikonkaviteten

Lad f være en C^2 -funktion defineret på et åbent, konvekst område S i $\mathbb{R}^n$. Definér de begrænsede Hessians determinanter $B_r(x)$ ved (11). Da gælder:

$$B_r(x) = \begin{vmatrix} 0 & f'_1(x) & \cdots & f'_r(x) \\ f'_1(x) & f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1r}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_r(x) & f''_{r1}(x) & \cdots & f''_{rr}(x) \end{vmatrix}, \quad r = 1, \dots, n \quad (13)$$

- En nødvendig betingelse for at f er quasikonkav er, at $(-1)^r B_r(x) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $r = 1, \dots, n$.
- En tilstrækkelig betingelse for at f er strengt quasikonkav er, at $f'_1 \neq 0$ og $(-1)^r B_r(x) > 0$ for alle $\mathbf{x}$ i S og alle $r = 1, \dots, n$.

Specifikt for en funktion af to variable bliver den *Bordered* Hessematrix til:

$$B_2(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & f'_1(x, y) & f'_2(x, y) \\ f'_1(x, y) & f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f'_2(x, y) & f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{vmatrix}$$

Eksempel 20: Bestemmelse af quasikonkavitet vha. *Bordered* Hessematrix

Betragt funktionen: $f(x, y) = x^2 + y^2$. De førsteordens afledte er:

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Mens de andenordens afledte er (Hesse-matricen):

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

Hesse-matricen er:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Den *Bordered* Hessematrix er:

For $r = 1$:

$$B_1(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = -4x^2$$

For $r = 2$:

$$B_2(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2 & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4y^2 - 4x^2$$

Nu gælder det, at for $r = 1$:

$$(-1)^1 B_1(x, y) = -(-4x^2) = 4x^2 > 0$$

Mens for $r = 2$:

$$(-1)^2 B_2(x, y) = 4y^2 - 4x^2$$

Da $(-1)^r B_r(x, y) \geq 0$ for $r = 1, 2$ og for alle x, y , er funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ quasikonkav.

3.8 Lagrange problemet for n -variable

Betragt følgende maksimerings(minimerings)-problem:

$$\max(\min) f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{under bibet.} \quad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = c_m \end{cases} \quad (m < n)$$

Det kan løses ved at betragte de første ordens afledte for Lagrange funktionen, hvor λ opfattes som en konstant, når der differentieres.

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1(g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1) - \dots - \lambda_m(g_m(x_1, \dots, x_n) - c_m)$$

Det gælder nu, at: **hvis Lagrange-funktionen $\mathcal{L}(x)$ er konkav (konveks) mht x , så er x^***

løsning til max-problemet (min-problemet).

Eksempel 21: Lagrange problemet for en funktion af to variable med to bibetingelser

Vi ønsker maksimere funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bibetingelserne:

$$\begin{cases} g_1(x, y) = x + y - 1 = 0 \\ g_2(x, y) = x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Lagrange funktionen bliver:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_1(x + y - 1) - \lambda_2(x - y - 1)$$

Med tilhørende førsteordens afledte:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -(x + y - 1) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = -(x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

Og følgende andenordensafledte:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x - \lambda_1 - \lambda_2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2y - \lambda_1 + \lambda_2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x - \lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2y - \lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

Hessematricen er dermed givet ved:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hvor det følger, at $f''_{11} = 2 > 0$ og $\det = 4 > 0$, hvorfor lagrangefunktionen er strengt konveks. Derfor er løsningen til Lagrange problemet et minima! De førsteordensafledte giver os følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Først findes x og y ;

$$x = 1 - y \quad \text{følger af } x + y = 1$$

$$1 - y - y = 1$$

$$1 - 2y = 1$$

$$y = 0$$

$$x + 0 = 1 \iff x = 1 \quad \text{følger af } x + y = 1 \text{ ved indsættelse af } y = 0$$

Hernæst findes de tilhørende værdier for Lagrange *multiplikatorerne*:

$$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$2 - \lambda_1 = \lambda_2$$

$$-\lambda_1 + 2 - \lambda_1 = 0 \quad \text{ved indsættelse i } 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$-2\lambda_1 = -2 \iff \lambda_1 = 1$$

$$-1 + \lambda_2 = 0 \iff \lambda_2 = 1 \text{ ved indsættelse i } 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Løsningerne er altså $x = 1$, $y = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, og er som bekendt et minima, idet Lagrange-funktionen er (strengt) konveks.

4 Integralregning

4.1 Dobbeltintegraler over *produktmængder*

Lad f være en kontinuert funktion defineret over rektanglet $R = [a, b] \times [c, d]$. Da gælder

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, y) dy \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$$

I selve integrationsprocessen behandles x som en konstant, når der differentieres mht. y , mens y behandles som en konstant, når der differentieres mht. x .

Eksempel 22: Beregning af dobbeltintegral over produktmængde

Betragt følgende integral: $\iint_R (x^2y + xy^2 + 2x) dx dy$, hvor $R = [0, 1] \times [-1, 3]$. Det bliver til:

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^3 (x^2y + xy^2 + 2x) dy \right) dx$$

Som bestemmes nedenfor:

Først det indre:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 x^2 y + x y^2 + 2x \, dy &= \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} x y^3 + 2xy \right]_{-1}^3 \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot 9 + \frac{1}{3} x \cdot 27 + 6x \right) - \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x - 2x \right) \\ &= 4.5x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 9x + 6x - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right) \\ &= 4x^2 + \frac{9}{1}x + \frac{6}{1}x + \frac{1}{3}x \\ &= 4x^2 + \frac{27+18+7}{6}x = 4x^2 + \frac{52}{6}x\end{aligned}$$

Herefter det ydre:

$$\int_0^1 4x^2 + \frac{52}{6}x \, dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{26}{3}x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{26}{3} = \frac{30}{3} = \underline{\underline{10}}$$

4.2 Dobbeltintegraler over generelle mængder

Betragt en mere generel mængde:

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

Her kan dobbeltintegralet tilsvarende findes som:

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Bemærk:

- Grænserne i det indre integral afhænger af x .
- Integrationsrækkefølgen kan ikke umiddelbart byttes om.
- Derudover samme fremgangsmåde som tidligere.

Det tilsvarende gælder, hvis x -afgrænses af en funktion af y og mængden bliver:

$$A = \{(x, y) : p(y) \leq x \leq q(y), c \leq y \leq d\}$$

Her er integralet:

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Eksempel 23: Beregning af dobbeltintegral over generel mængde (y -afgrænses af x)

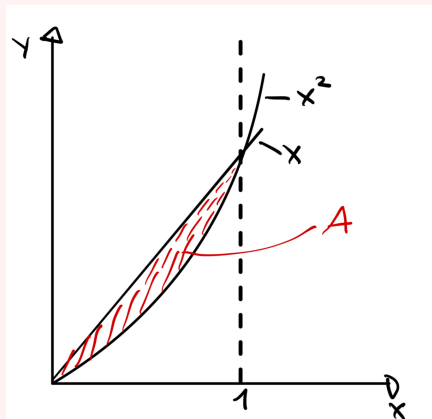
Betragt følgende integral:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x^2 + xy) \, dy \right) dx$$

Den tilhørende mængde aflæses til:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

Som er skitseret nedenfor:



Integralet løses forneden:

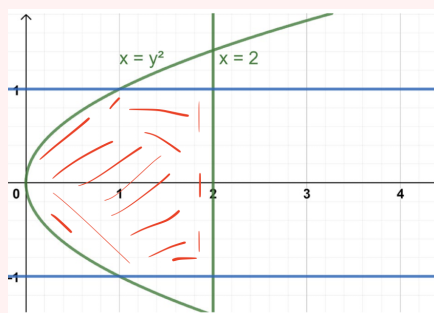
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^x (x^2 + xy) dy dx & \text{ Først bestemmes det inden:} \\ \int_x^x x^2 + xy dy &= \left[x^2 y + \frac{1}{2} x y^2 \right]_x^x = \left(x^2 + \frac{1}{2} x^3 \right) - \left(x^2 + \frac{1}{2} x^3 \right) = \frac{3}{2} x^3 - x^4 - \frac{1}{2} x^5 \\ \text{Herefter det yder:} \\ \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^3 - x^4 - \frac{1}{2} x^5 \right) dx &= \left[\frac{3}{8} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{14} x^6 \right]_0^1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{14} = \frac{3 \cdot 15 - 2 \cdot 4 - 10}{120} = \frac{45 - 24 - 10}{120} = \frac{11}{120} \end{aligned}$$

Eksempel 23: Beregning af dobbeltintegral over generel mængde (x -afgrænses af y)

Betragt mængden:

$$A = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$$

Hvor $f(x, y) = 2x$. Mængden er skitseret forneden:



Og integralet bliver:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{y^2}^2 2x dx \right) dy$$

Som løses nedenfor:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \int_{y^4}^2 (2 \times dx) dy \quad \text{Først løses det inde.} \\
 & \int_{y^4}^2 (2 \times dx) = [x^2]_{y^4}^2 = 4 - y^4 \quad \text{Herefter det yde.} \\
 & \int_{-1}^1 (4 - y^4) dy = \left[4y - \frac{1}{5} y^5 \right]_{-1}^1 = \left(4 - \frac{1}{5} \right) - \left(-4 + \frac{1}{5} \right) \\
 & = 8 - \frac{2}{5} = \frac{8}{1} - \frac{2}{5} = \frac{40 - 2}{5} = \frac{38}{5}
 \end{aligned}$$

5 Differensligninger

Lineære første ordens differensligninger er givet ved formen:

$$x_{t+1} = ax_t + b, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Hvor:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= ax_0 + b \\
 x_2 &= a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + (1+a)b \\
 x_3 &= a(a^2x_0 + (1+a)b) + b = a^3x_0 + (1+a+a^2)b
 \end{aligned}$$

Disse løses ved følgende formel:

$$x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad a \neq 1 \quad (14)$$

Differensligningen er globalt asymptotiske stabile, hvis:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^t \rightarrow 0 \text{ når } t \rightarrow \infty$$

Ligevægtstilstanden (for første ordens lineære differensligninger) er givet ved:

$$x^* = \frac{b}{1-a} \quad a \neq 1 \quad (15)$$

Forskellige eksempler for divergens og konvergens er givet ved nedenstående:

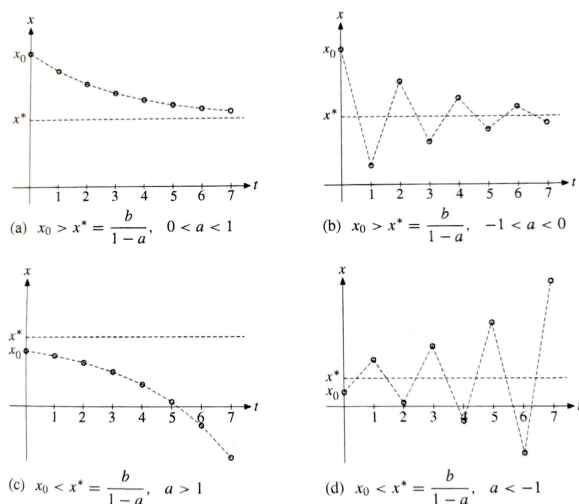
Eksempel 24: Løsning af differensligning

Betrakt følgende differensligning:

$$4x_{t+1} - 2x_t - 6 = 0$$

Den kan omskrives til den vanlige form ved:

$$\begin{aligned}
 4x_{t+1} &= 2x_t + 6 \\
 x_{t+1} &= \frac{1}{2}x_t + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



Figur 2: Forskellige typer af konvergens og divergens

Hvor $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{3}{2}$. Derfor bliver x_t :

$$\begin{aligned}
 x_t &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot \left(x_0 - \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 x_t &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot \left(x_0 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1}\right)\right) \\
 x_t &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot \left(x_0 - \frac{6}{2}\right) + \frac{6}{2} \\
 x_t &= \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot (x_0 - 3) + 3
 \end{aligned}$$

6 Differentialligninger

6.1 Løsning ved separation af de variable

Separable differentialligninger givet ved formen:

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

Kan løses vha. følgende metode:

Eksempel 25: Løsning af separabel differentialligning

Betragt differentialligningen:

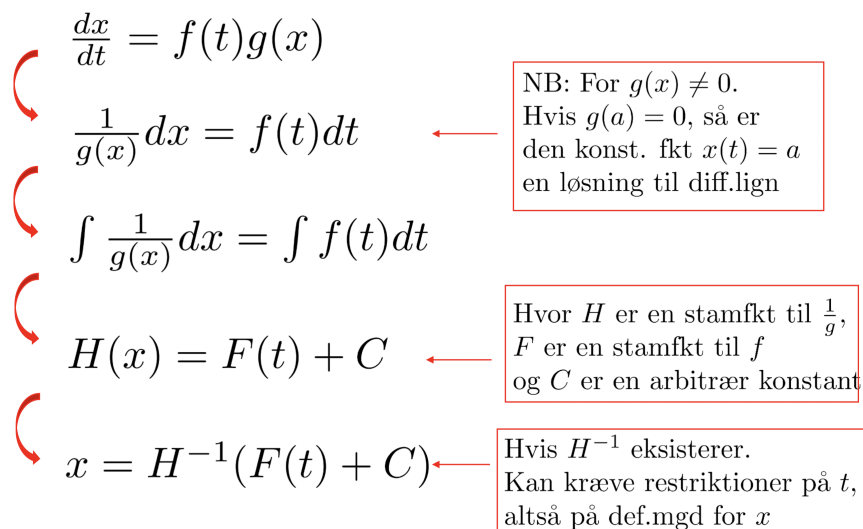
$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2+t^2} \cdot x^8$$

Den trivielle løsning til differentialligningen er givet ved $x = 0$. For ikke trivielle løsninger, dvs. $x \neq 0$, kan differentialligningen løses ved separation af de variable. * bliver da til:

$$x^{-8} \cdot dx = \frac{t}{2+t^2} \cdot dt$$

Hvilket løses nedenfor:

$$\int x^{-8} \cdot dx = \int \frac{t}{2+t^2} \cdot dt$$



Figur 3: Løsning af seperable differentialligninger

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \int t \cdot \frac{1}{2+t^2} \cdot dt$$

Hvor $u = 2 + t^2$ og $du = 2t \cdot dt \implies dt = \frac{1}{2t} \cdot du$

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \int t \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2t} \cdot du$$

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C$$

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \frac{1}{2} \cdot \ln |2 + t^2| + C$$

$$-\frac{1}{7} \cdot x^{-7} = \ln \sqrt{2 + t^2} + C$$

$$x^{-7} = C_2 - 7 \cdot \ln \sqrt{2 + t^2}, \quad \text{hvor } C_2 = -7 \cdot C$$

$$x = \sqrt[7]{\frac{1}{C_2 - 7 \cdot \ln \sqrt{2 + t^2}}}$$

6.2 Løsning ved panserformlen

Betragt den generelle form på en lineær førsteordens differentialligning:

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)$$

Her er løsningen givet ved:

$$x(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)} dt,$$

hvor $A(t)$ er en stamfunktion til $a(t)$.

Eksempel 26: Løsning af differentialligning vha. panserformlen

Betragt differentialligningen:

$$\frac{dx}{dt} + (\ln(t) + 1)x = e^{t-t\ln(t)}$$

Den løses vha. *panserformlen*, hvor $\ln(t) + 1 = a(t)$ og $e^{t-t\ln(t)} = b(t)$.

Indledningsvist findes $A(t)$:

$$\int (\ln(t) + 1) dt = t \cdot \ln(t) - t + t = t \cdot \ln(t)$$

Herefter indsættes det fundne udtryk:

$$x(t) = C \cdot e^{-t \cdot \ln(t)} + e^{-t \cdot \ln(t)} \cdot \int e^{t-t \cdot \ln(t)} \cdot e^{t \cdot \ln(t)} dt$$

$$x(t) = C (e^{\ln(t)})^{-t} + (e^{\ln(t)})^{-t} \cdot \int e^t dt$$

$$x(t) = C \cdot t^{-t} + t^{-t} \cdot e^t$$

$$x(t) = t^{-t} \cdot (C + e^t), \text{ hvor } t > 0 \text{ og } C \text{ er en vilkårlig konstant.}$$

Nu findes løsningen, der opfylder $x(1) = 5e$:

$$5e = 1^{-1} \cdot (C + e^1)$$

$$5e = 1 \cdot C + e$$

$$\underline{4e = C}$$

Den fuldstændige løsning er gennem punktet $(1, 5e)$:

$$x(t) = t^{-t} (4e + e^t), \text{ hvor } t > 0$$