



Ugeseddel 1 - Mikroøkonomi I

Levi van Boekel

Opgave 1

Vi betragter følgende følgende brøk:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Det er klart, at omskrivningerne (a) og (b) ikke kan være korrekte, da både addition og subtraktion kræver, at brøkerne har fælles nævner. For at opnå dette skal vi krydsmultiplicere. Det giver:

$$\frac{a \cdot d}{bd} + \frac{c \cdot b}{bd} = \frac{ac + bc}{bd} \quad (1)$$

Derfor er det alene (c) der er korrekt.

Opgave 2

Vi betragter følgende tre delmængder af $\mathbb{R}$:

$$X = \{x \mid x \geq x_a \wedge x \leq x_b\},$$

$$Y = \{y \mid y \in [0, y_a] \vee y \in [y_b, 1]\}, \text{ hvor } y_a \geq 0 \text{ og } y_b \leq 1,$$

$$Z = \{z \mid \neg(z \in (-\infty, z_a)) \wedge \neg(z \in (z_b, \infty))\}.$$

2.A

Vi ser, at der må gælde, at $x \geq x_a$ og $x \leq x_b$. Det betyder, at den nedre grænse af intervallet er givet ved x_a og den øvre grænse er givet ved x_b — altså $[x_a, x_b]$. Da intervallet skal inkludere $[0, 1]$, må det nødvendigvis gælde, at $x_a = 0 \cap x_b = 1$.

2.B

Af definitionen fremgår det, at mængden Y består af to intervaller; $y \in [0, y_a]$ eller $y \in [y_b, 1]$. Da det skal gælde, at $y_a \geq 0 \cap y_b \leq 1$, ser vi, at der nødvendigvis må gælde, at $y_a > y_b$, idet Y skal ligge i intervallet $[0, 1]$. Derfor er en løsning, at $y_a = 1 \cap y_b = 0$. Mere generelt kan vi sige, at $y_a = 1$ og $y_b \leq 1$, da y_a i dette tilfælde opfylder definitionen alene. En tredje løsning er givet ved $y_a = y_b$. Her vil de to intervaller overlappe i netop et punkt, men alligevel opfylde definitionen, ved f.eks. $y_a = 0.5$.

2.C

Den tredje mængde består af alle punkter, der ikke ligger i intervallet $] - \infty, z_a[$ eller i intervallet $]x_b, \infty[$. Af det første interval fremgår det, at $z \geq z_a$, mens det af det andet interval fremgår, at $z \leq z_b$ (da z hhv. ikke ligger i intervallet $] \infty, z_a[$ og $]z_b, \infty[$). Vi får derfor, at $z_a \leq z \leq z_b$. Da hele intervallet skal ligge i intervallet $[0, 1]$, kan vi derfor se, at $z_a = 0$ og $z_b = 1$.

Opgave 3

Givet følgende fem udtryk, og de reelle tal a og b , må der gælde, at:

$$x^a x^b = x^c \Leftrightarrow c = a + b$$

$$x^a x^{-b} = x^c \Leftrightarrow c = a - b$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^c \Leftrightarrow c = a - b$$

$$(x^a)^b = x^c \Leftrightarrow c = ab$$

$$(ax)^b = dx^c \Leftrightarrow a^b = d \cap b = c$$

$$\ln(a) + \ln(b) = c \Leftrightarrow c = ab$$

$$\ln(a) - \ln(b) = c \Leftrightarrow c = \frac{a}{b}$$

$$\ln(x^a) = c \ln(x) \Leftrightarrow a = c$$

Opgave 4

4.A & 4.B

Lad $f(x) = ax + b(1 - x)$ for $a > 0 \cap b > 0$. Vi ønsker nu at finde $v = \max_{x \in [0,1]} f(x)$, altså maksimumsværdien for funktionen i det lukkede interval mellem 0 og 1. Vi starter med at simplificere funktionen og får:

$$f(x) = ax + b - bx \iff b + x(a - b)$$

Vi får da følgende FOC:

$$a - b = 0 \iff a = b$$

Hvis vi sætter et af de to ind i den oprindelige løsning, ser vi at $ax = bx$. Derfor bliver funktionsværdien til b , altså; de indre løsninger er givet ved en vandret linje ud for b . Intuitionen er, at når $b = a$, bliver funktionen blot den samme vandrette linje og derfor er maksimumspunkterne nødvendigvis alle punkter.

Vi evaluerer nu funktionen ved randpunkterne. Ved $x = 0$ får vi b , mens vi for $x = 1$ får $a + b - b = a$. Hvis vi nu kigger tilbage til den oprindelige funktion, kan vi se, at, hvis $a > b$, hælder funktionen opad og maksimumspunktet er derfor givet ved a , mens vi for $b > a$ kan se, at funktionen hælder nedad og maksimumspunktet derfor er givet ved b . Altså;

$$\begin{cases} a & \text{hvis } a > b \\ b & \text{hvis } b > a \\ a = b & \text{hvis } a = b \end{cases}$$

Som vi kan skrive som: $X^* = \{x^* \in [0, 1] \mid x^* = a \text{ hvis } a > b, x^* = b \text{ hvis } b > a, x^* = a = b \text{ hvis } a = b, \}$

4.C & 4.D

Vi betragter nu funktionen: $g(x) = ax_1 + bx_2$ for $a > 0 \cap b > 0$. Vi ønsker at maksimere udtrykket under bibetingelsen, at $x_1 + x_2 = 1 \iff 1 - x_1 - x_2$. Vi opstiller hertil følgende Lagrange funktion:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \lambda \cdot (1 - x_1 - x_2)$$

Vi finder nu de tre FOC:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_1} &= a - \lambda = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_2} &= b - \lambda = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} &= 1 - x_1 - x_2 - \lambda = 0\end{aligned}$$

Vi ser straks, at $a = b = \lambda$. Vi ved samtidig, at $1 - x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 + x_2 = 1$.

$$X^* = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_+^2 \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{hvis } a = b \\ (1, 0) & \text{hvis } a > b \\ (0, 1) & \text{hvis } a < b \end{cases}$$

De sidste to følger af at betragte funktionen. Hvis $a > b$, vil det altid gælde, at man vil få en højere værdi ved at placere flere x 'ere hos x_1 og vice versa.

Opgave 5

Vi betragter følgende funktioner:

- i. $f_1(x_1, x_2) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, hvor $\alpha \in (0, 1)$,
- ii. $f_2(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, hvor $\alpha \in (0, 1)$,
- iii. $f_3(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{-\beta} + (1 - \alpha)x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$, hvor $\alpha \in (0, 1)$ og $\beta > -1$ med $\beta \neq 0$.

5.A

De partielt afledte for den første funktion (i.) er givet ved:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f_1(x_1, x_2)}{\delta x_1} &= \alpha \\ \frac{\delta f_1(x_1, x_2)}{\delta x_2} &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

De partielt afledte for den anden funktion (ii.) er givet ved:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f_2(x_1, x_2)}{\delta x_1} &= \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha} \\ \frac{\delta f_2(x_1, x_2)}{\delta x_2} &= x_1^\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot x_2^{-\alpha}\end{aligned}$$

De partielt afledte for den tredje funktion (iii.) er givet ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f_2(x_1, x_2)}{\delta x_1} &= -\frac{1}{\beta}(\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}-1} \cdot (-\beta \alpha x_1^{-\beta-1}) \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}-1} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1}) \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1}) \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1}) \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta} \cdot (1+\beta)} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1}) \\
&= f(x_1, x_2)^{1+\beta} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1})
\end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f_2(x_1, x_2)}{\delta x_2} &= -\frac{1}{\beta}(\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}-1} \cdot (-\beta \cdot (1-\alpha)x_2^{-\beta-1}) \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}-1} \cdot (1-\alpha)x_2^{-\beta-1} \\
&= (\alpha x_1^{-\beta} + (1-\alpha)x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta} \cdot (1+\beta)} \cdot (1-\alpha)x_2^{-\beta-1} \\
&= f(x_1, x_2)^{1+\beta} \cdot (1-\alpha)x_2^{-\beta-1}
\end{aligned}$$

5.B

Forholdet mellem de partielt afledte for den første funktion (i.) er givet ved:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

For den anden funktion (ii.) har vi:

$$\frac{\alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha}}{x_1^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha \cdot x_1^{-1} \cdot x_2}{(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

For den tredje funktion (iii.) har vi:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1, x_2)^{1+\beta} \cdot (\alpha x_1^{-\beta-1})}{f(x_1, x_2)^{1+\beta} \cdot (1-\alpha)x_2^{-\beta-1}} &= \frac{(\alpha x_1^{-\beta-1})}{(1-\alpha)x_2^{-\beta-1}} \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_1^{-\beta-1}}{x_2^{-\beta-1}} \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\beta-1} \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta+1}
\end{aligned}$$

5.C

Vi ser straks, at når $\beta \rightarrow 0$ går udtrykket mod $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$. Vi ser samtidig, at når $\beta \rightarrow -1$, bliver udtrykket til $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, da $x^0 = 1$.

5.D

Vi løser de fundne forhold fra 5.B nedenfor. Vi ser, at det er udefineret for i., da x_2 her ikke optræder. For den anden funktion (ii.) kan vi beregne følgende:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1} &= s \\ \alpha \cdot x_2 &= s \cdot (1-\alpha) \cdot x_1 \\ x_2 &= \frac{(1-\alpha) \cdot s}{\alpha} \cdot x_1 \equiv g(x_2)\end{aligned}$$

For den tredje funktion (iii.) har vi:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta+1} &= s \\ \alpha \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta+1} &= s \cdot (1-\alpha) \\ \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta+1} &= \frac{s \cdot (1-\alpha)}{\alpha} \\ \frac{x_2}{x_1} &= \left(\frac{s \cdot (1-\alpha)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \\ x_2 &= x_1 \cdot \left(\frac{s \cdot (1-\alpha)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \equiv h(x_2)\end{aligned}$$

5.E

For at finde de afledte af udtrykkene fundet i 5.D, betragter vi først ii. Vi starter med at tage logaritmen på begge sider af lighedstegnet for at gøre fortolkningen til procent lettere. Da:

$$\begin{aligned}\ln(g(x_2)) &= \ln\left(\frac{(1-\alpha) \cdot x_1}{\alpha}\right) + \ln(s) \\ \ln(g(x_2)) &= C + \ln(s) \\ \frac{\delta \ln(g(x_2))}{\delta \ln(s)} &= \frac{\delta}{\delta \ln(s)} \cdot (C + \ln(s)) \\ \frac{\delta \ln(g(x_2))}{\delta \ln(s)} &= \frac{\delta \ln(s)}{\delta \ln(s)} = 1\end{aligned}$$

Den procentvise ændring i x_2 ved en marginal procentvis ændring i s er altså lig med 1 for ligning ii. For ligning iii. har vi:

$$\begin{aligned}\ln(h(x_2)) &= \ln(x_1) + \frac{1}{\beta+1} \cdot \ln\left(\frac{s \cdot (1-\alpha)}{\alpha}\right) \\ \frac{\delta \ln(h(x_2))}{\delta \ln(s)} &= \frac{\delta(\ln(x_1) + \frac{1}{\beta+1} \cdot \ln(s \cdot \frac{(1-\alpha)}{\alpha}))}{\delta \ln(s)} \\ \frac{\delta \ln(h(x_2))}{\delta \ln(s)} &= \frac{\delta(\ln(x_1) + \frac{1}{\beta+1} \cdot \ln(s) + \frac{1}{\beta+1} \cdot \ln(\frac{1-\alpha}{\alpha}))}{\delta \ln(s)} \\ \frac{\delta \ln(h(x_2))}{\delta \ln(s)} &= \frac{1}{\beta+1}\end{aligned}$$

Opgave 6

6.A

Vi opstiller problemet matematisk:

$$\max_{C \in \mathbb{R}_+, L \in \{0,1,\dots,2\}} (\ln(C) - \frac{\nu L^{1+\frac{1}{\epsilon}}}{1+\frac{1}{\epsilon}}) \text{ u.b.b. } pC \leq M + wL \cdot (1 - \tau_0) - \tau_1 \cdot \max\{wL - \kappa, 0\}$$

6.B

For at få problemet til alene at være et valg om arbejdstid, isolerer vi C ved bibetingelsen. Da $p > 0$ kan vi gøre dette uden at ændre uligheden. Vi får da, at:

$$\max_{L \in \{0,1,\dots,2\}} (\ln(C) - \frac{\nu L^{1+\frac{1}{\epsilon}}}{1+\frac{1}{\epsilon}}) \text{ u.b.b. } C = \frac{1}{p} \cdot [M + wL \cdot (1 - \tau_0) - \tau_1 \cdot \max\{wL - \kappa, 0\}]$$

Hvor $\leq$ er blevet erstattet af $=$, fordi forbrugeren vil forbruge hele sit budget (det følger af den strengt voksende nyttefunktion for forbrug).

6.C

Løsningen er rapporteret nedenfor, svaret kan findes i Excel.

M	10
p	1
w	25
v	0,35
epsilon	1
tax_1	0,4
tax_2	0,1
kappa	10
C	27,3329698
L	1,30663759
Nytte	3,00931585

Figur 1: Løsning af maksimeringsproblemet

6.D

Det er muligt at øge skatteindtægterne ved en skattesats, τ_0 på 60 pct., hvis vi antager, at skattesatsen ligger mellem 0 og 1, og er diskret fordelt i 10 pct. intervaller (det er muligt at finde den eksakte løsning på decimalen, men det vil kræve mere sofistikerede metoder).

M	10	M	10	M	10	M	10	M	10
p	1	p	1	p	1	p	1	p	1
w	25	w	25	w	25	w	25	w	25
v	0,35	v	0,35	v	0,35	v	0,35	v	0,35
epsilon	1	epsilon	1	epsilon	1	epsilon	1	epsilon	1
tax_1	0,4	tax_1	0,5	tax_1	0,6	tax_1	0,7	tax_1	0,8
tax_2	0,1	tax_2	0,1	tax_2	0,1	tax_2	0,1	tax_2	0,1
kappa	10	kappa	10	kappa	10	kappa	10	kappa	10
C	27,3329698	C	23,2733843	C	19,3189828	C	15,5835793	C	12,4359313
L	1,30664	L	1,22754	L	1,10920	L	0,91972	L	0,57437
Nytte	3,00931585	Nytte	2,88369748	Nytte	2,74578226	Nytte	2,59915336	Nytte	2,4628568
Tax_revenue	15,3329698	Tax_revenue	17,4130764	Tax_revenue	18,4109599	Tax_revenue	17,3343173	Tax_revenue	11,9233817

Figur 2: Maksimering af skatteprovenu