



Ugeseddel 2 - Makroøkonomi I

Levi van Boekel

Opgave 3

3.2

3.2.1

Vi omskriver $k = \frac{K}{L}$ som ønsket:

$$\begin{aligned}\ln(k) &= \ln(K) - \ln(L) \\ \frac{\delta}{\delta t} [\ln(k)] &= \frac{\delta}{\delta t} [\ln(K)] - \frac{\delta}{\delta t} [\ln(L)] \\ \frac{k'}{k} &= \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}\end{aligned}$$

Det følger heraf, at:

$$k' = \left(\frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} \right) k \quad (1)$$

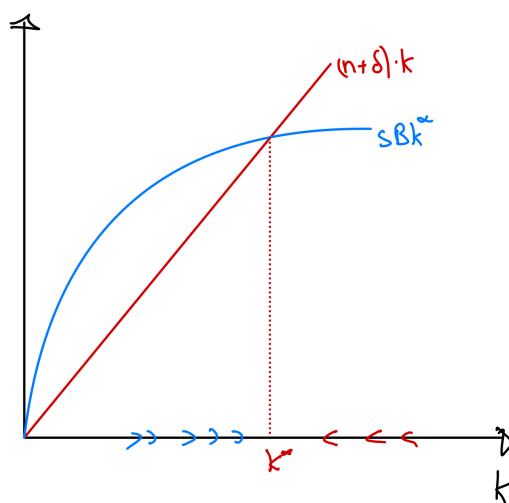
Vi indsætter nu definitionerne fra bogen:

$$\begin{aligned}k' &= \left(\frac{sY - \delta K}{K} - n \right) k \\ k' &= \left(\frac{sBK^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K}{K} - n \right) k \\ k' &= sBK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}k - (\delta + n)k \\ k' &= sBk^{\alpha-1}k - (\delta + n)k \\ k' &= sBk^\alpha - (\delta + n)k\end{aligned}$$

På venstresiden står nu ændringen i kapital per arbejder, mens højresiden viser to led, der kan stå for ændringen. Kapital per arbejder kan stige (første led), hvis opsparingen per arbejder stiger (sBk^α), mens den afhænger negativt af befolkningsvæksten (da den udttynder kapital per arbejder) og nedslidning, idet det gør kapitalapparatet mindre.

3.2.2

De to led i Solowligningen er illustreret nedenfor: Idet sBk^α er strengt konkav, og skærer over origo,



Figur 1: Visualisering af de to effekter i Solowligningen

følger det, at der findes en unik skæring mellem de to kurver. Hvis vi ligger til højre for skæringen, vil det negative led dominere og vice versa, hvorfor vi altid vil bevæge os mod k^* .

3.2.3

Kapital per arbejder er i steady state givet ved:

$$\begin{aligned} sBk_*^\alpha - (\delta + n)k_* &= 0 \\ sBk_*^\alpha &= (\delta + n)k_* \\ k_*^\alpha &= \frac{(\delta + n)k_*}{sB} \\ k_* &= B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

For at finde y_* indser vi, at $\frac{Y}{L} = \frac{BK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = B\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha$. Lad nu $k \equiv \frac{K}{L}$, da har vi:

$$\begin{aligned} y_* &= B \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^\alpha \\ y_* &= B \left(B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \\ y_* &= \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Herefter findes vi forbruget per arbejder:

$$\begin{aligned} c &= (1 - s)y_t \\ c &= (1 - s) \cdot B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Reallejesatsen giver:

$$\begin{aligned} r_* &= \alpha Bk_*^{\alpha-1} \\ &= \alpha B \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha-1} \\ &= \alpha B^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \cdot B^{\frac{-(1-\alpha)}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{-1} \\ &= \alpha \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{-1} \longleftrightarrow \alpha \left(\frac{\delta + n}{s} \right) \end{aligned}$$

Reallønnen bliver:

$$\begin{aligned} w_* &= (1 - \alpha)BK^\alpha L^{-\alpha} \\ w_* &= (1 - \alpha)Bk_*^\alpha \\ w_* &= (1 - \alpha) \left(B^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

For alle udtryk gælder det, at de er fuldstændig identiske i diskret tid. Hvis opsparingen stiger, vil reallejesatsen falde, idet s står i nævneren, mens reallønnen vil stige. Begge dele giver intuitivt mening,

idet et højere udbud af kapital øger arbejdskraftens marginalprodukt og vice versa for kapital.

Der er ingen vækst i y_* i steady state, idet udtrykket udelukkende afhænger af konstanter, der ikke ændrer sig. Væksten i Y er dog lig n , idet:

$$Y = BK^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$Y = B(k_*L)^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$Y = Bk_*^\alpha L$$

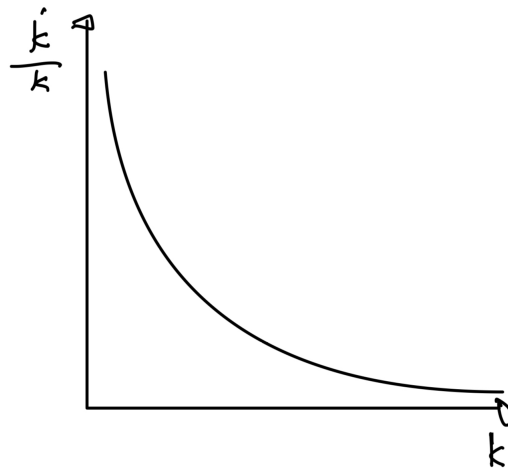
Både B og k_* er konstanter, hvorfor væksten alene kommer fra L , og denne er som bekendt n .

3.2.4

Vi bruger formel 1:

$$\begin{aligned}\frac{k'}{k} &= \frac{sY - \delta K}{K} - n \\ &= \frac{sBK^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K}{K} - n \\ &= sBk^{\alpha-1} - (\delta + n)\end{aligned}$$

Illustreret nedenfor:



Figur 2: $\frac{k'}{k}$ visualiseret

Vi ser nu, at (fordi k afhænger af t):

$$y = Bk^\alpha$$

$$y' = Bk^\alpha \frac{\delta}{\delta t}$$

$$y' = \alpha \cdot Bk^{\alpha-1} k'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha \cdot Bk^{\alpha-1} k'}{Bk^\alpha}$$

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{k'}{k}$$

Når vi bevæger os mod steady state fra venstre, vil r falde og w stige, omvendt, hvis vi bevæger os

fra højre. Væksten i k vil altid være langsommere end væksten i α , idet $0 < \alpha < 1$. Jo tættere vi kommer på steady state, jo mindre vil væksten dog blive i begge.

3.6

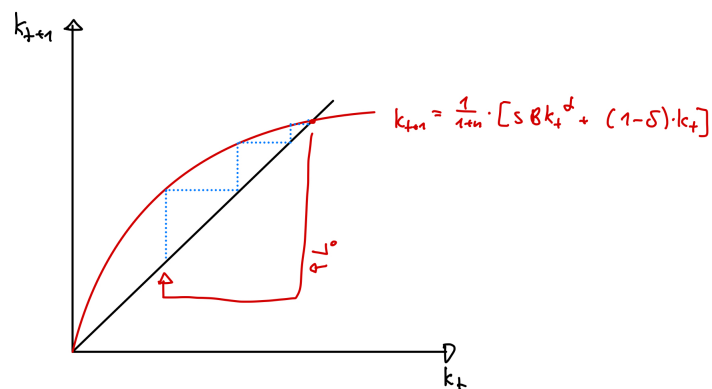
Vi ved, at transitionsligningen er givet ved:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} [sBk_t^\alpha + (1-\delta)k_t] \quad (2)$$

Hvor $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$. Hvis vi vil finde effekten af en initial forøgelse af L_t på steady-state niveauet af kapital, kan vi løse (1) mht. k^* . Da:

$$\begin{aligned} k_* &= \frac{1}{1+n} [sBk_*^\alpha + (1-\delta)k_*] \\ k_*(1+n) &= sBk_*^\alpha + (1-\delta)k_* \\ (1+n) &= sBk_*^{\alpha-1} + (1-\delta) \\ k_*^{\alpha-1} &= \frac{1+n-1+\delta}{sB} \\ k_*^{1-\alpha} &= B \cdot \frac{s}{n+\delta} \\ k_* &= B^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Vi ser, at steady state kapital per arbejder ikke afhænger af initialværdien af L_0 . Den initiale værdi af k_t vil dog være lavere, hvorfor det — løst sagt — vil tage længere tid for økonomien at komme tilbage til steady state. I opgavens tilfælde vil vi altså blive rykket til venstre for steady state, hvorefter væksten mod steady state vil finde sted igen. Det er illustreret nedenfor:



Figur 3: Transitionsdiagram ved stigning i L_0