



Ugeseddel 1 - Makroøkonomi I

Levi van Boekel

Opgave 1

1.1

Vi definerer BNP per capita (y_p) og BNP per beskæftigede (y_w) som:

$$y_p = \frac{\text{BNP}}{\text{Befolkning}} \quad y_w = \frac{\text{BNP}}{\text{beskæftigede}}$$

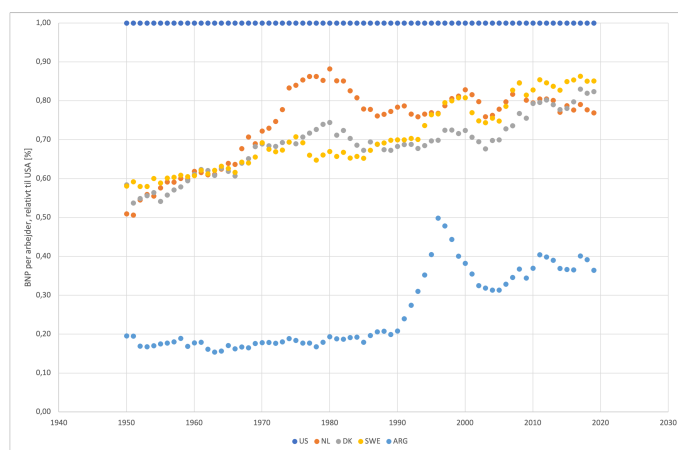
Forholdet mellem de to mål er:

$$\frac{y_p}{y_w} = \frac{\text{BNP}}{\text{Befolkning}} \cdot \frac{\text{beskæftigede}}{\text{BNP}} = \frac{\text{beskæftigede}}{\text{befolkning}}$$

Som angiver den implicitte beskæftigelsesgrad. I lande, hvor der er en høj grad af sort økonomi, vil man dermed undervurdere den samlede økonomiske formåen ved at se på y_p , hvorfor y_w her kan være et bedre mål. Generelt kan vi sige, at brugen af BNP per beskæftigede giver mulighed for (til en vis grad) at rense vores mål for levestandarden, for forskelle i deltagelsen i den formelle økonomi. Selv, hvis man sammenligner lande, hvor deltagelsen i den formelle økonomi er den samme, og forskellene i beskæftigelsesgraden skyldes forskelle i f.eks. præferencer for fritid, kan man fortsat argumentere for, at y_w er et mere retvisende mål, ved at påpege, at hjemmeproduktion og fritid også bidrager til økonomien, men ikke bliver monetariseret. Afsluttende er y_w i højere grad korreleret med produktivitet end blot produktion per borger (selvom BNP per time bør foretrækkes).

1.5

Den ønskede figur er tegnet nedenfor:



Figur 1: BNP per arbejder i udvalgte lande, relativt til USA, datakilde: PWT

Det fremgår, at BNP per arbejder i udvalgte europæiske lande konvergerer mod det amerikanske niveau, hvilket understøtter hypotesen om betinget konvergens, hvis vi antager, at landene i figurene har omtrent samme strukturelle niveau. Omvendt er konvergensen for Argentina mindre stærk, da forskelle i de strukturelle parametre her begrænser ubetinget konvergens.

Opgave 3

3.1

Vi definerer Cobb Douglas produktionsfunktionen til:

$$Y(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \quad (1)$$

Og ønsker at finde den marginale substitutionsrate mellem kapital og arbejdskraft, dvs. den rate, hvor firmaet kan substituere arbejdskraft for kapital og holde den samlede produktion konstant. Vi har da at gøre med implicit differentiation, hvor:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Y}{\delta L} &= (1 - \alpha) \cdot A \cdot K^\alpha \cdot L^{-\alpha} = (1 - \alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \\ \frac{\delta Y}{\delta K} &= \alpha \cdot A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Hvor forholdet mellem de to er;

$$\begin{aligned} MRTS &= -\frac{\frac{\delta Y}{\delta L}}{\frac{\delta Y}{\delta K}} = \frac{(1 - \alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha}{\alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{(1 - \alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^1}{\alpha \cdot A} = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{L}{K} \end{aligned}$$

Hvis virksomheder profitmaksimerer vil de forsøge at maksimere følgende udtryk (hvor vi antager fuld clearing):

$$\max_{K, L} : \quad \pi = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} - r \cdot K - w \cdot L$$

Her vil de tilstrækkelige førsteordensbetingelser medføre:

$$\begin{aligned} r &= \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} \\ w &= (1 - \alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Forholdet mellem realrenten og reallønnen er da nøjagtig lig med den marginale substitutionsrate mellem kapital og arbejdskraft, som ønskes vist. Intuitionen er lettest at forstå ved at se, hvad der ville ske, hvis de to ikke er ens. Betragt f.eks. en situation, hvor $\frac{r}{w} > MRTS$. Her aflønningen af kapital relativt til arbejdskraft overstige den *gevinst* virksomhederne opnå ved at øge kapitalen med en og mindske antallet af arbejdskraft med en. Her vil virksomhederne altså have incitament til at forbruge mindre kapital. Omvendt vil det være, hvis $\frac{r}{w} < MRTS$. Her vil virksomhederne have incitament til at forbruge mere kapital. I begge tilfælde vil virksomhederne substituere indtil det er opnået, at de to udtryk er lig hinanden.

Vi definerer substitutionselasticiteten mellem kapital og arbejdskraft til:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\delta \ln(\frac{K}{L})}{\delta \ln(MRTS)} \\ \frac{1}{\sigma} &= \frac{\delta \ln(MRTS)}{\delta \ln(\frac{K}{L})} \\ &= \left(\ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right) \right)' \\ &= 1\end{aligned}$$

Altså, at en forøgelse af $\frac{K}{L}$ forholdet øger $MRTS$. Intuitionen er, at når kapitalkoncentrationen stiger, bliver arbejdskraft en relativt mere knap ressource. Det betyder, at man skal opgive mere kapital for at få en enhed yderligere arbejdskraft for at bibeholde den samme produktion ($MRTS$). Det skyldes det aftagende grænseprodukt af kapital, og det faktum, at arbejdskraft med de opdatere relative forhold bidrager mere til produktionen og man derfor skal opgive mere kapital for at holde den ved samme niveau.

3.2

Vi betragter nu den generelle CES produktions funktion:

$$Y = \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad 0 < \alpha < 1, \sigma > 0, \sigma \neq 1 \quad (2)$$

Vi starter med at finde den marginale substitutionsrate for hhv. K og L .

$$\begin{aligned}MP_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot \alpha \cdot K^{-\frac{1}{\sigma}} \\ MP_L &= \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{-\frac{1}{\sigma}}\end{aligned}$$

Og har herefter:

$$\begin{aligned}MRS &= \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{L}{K} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{\sigma}}\end{aligned}$$

Den tilhørende substitutionselasticitet kan findes ved:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\delta \ln(\frac{K}{L})}{\delta \ln(MRTS)} \\ \frac{1}{\sigma} &= \frac{\delta \ln(MRTS)}{\delta \ln(\frac{K}{L})} \\ &= \left(\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \right)' \\ &= \left(\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{L}\right) \right)' \\ \frac{1}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma} \\ \sigma &= \sigma\end{aligned}$$

Afsluttende kan vi se, at CES funktionen bliver til en CD funktion, når $\sigma \rightarrow 1$, idet substitutionselasticiteten her går mod 1, som gælder for alle CD funktioner. En mere detaljeret matematisk udledning vil involvere at evaluere grænseværdierne i CES funktionen, hvilket undlades her.

3.3

Vi betragter:

$$\max_{K,L} : \pi = \left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - r \cdot K - w \cdot L$$

Og kan herfra udlede følgende, da vi får at vide, at der er kompetitiv markedsclearing og produktionsfaktorerne dermed bliver aflønnet til deres marginalprodukt. Vi udleder først det ønskede udtryk for K .

$$\begin{aligned} MP_K &= \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right) \cdot Y^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \alpha \cdot K^{-\frac{1}{\sigma}} \right) \\ \frac{MP_K}{Y} &= \frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right) \cdot Y^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \alpha \cdot K^{-\frac{1}{\sigma}} \right)}{Y} \\ \frac{MP_K \cdot K}{Y} &= \frac{Y^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \alpha \cdot K^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot K}{Y} \\ \frac{MP_K \cdot K}{Y} &= \alpha \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)^{-1} \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \\ &= \frac{\alpha (K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left(\alpha K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)} \\ &= \frac{\alpha \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha \cdot \frac{K}{L}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \end{aligned}$$

Og herefter for L :

$$\begin{aligned} \frac{MP_L \cdot L}{Y} &= \frac{[\dots]^{\frac{1}{s-1}} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{\frac{s-1}{s}}}{[\dots]^{\frac{s}{s-1}}} \\ &= [\dots]^{\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s-1}} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{\frac{s-1}{s}} \\ &= [\dots]^{\frac{-(s-1)}{s-1}} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{\frac{s-1}{s}} \\ &= [\dots]^{-1} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha K^{\frac{s-1}{s}} + (1-\alpha) L^{\frac{s-1}{s}}} \cdot L^{\frac{s-1}{s}} \\ &= \frac{(1-\alpha) \cdot L^{\frac{s-1}{s}}}{(\alpha K^{\frac{s-1}{s}} + (1-\alpha) L^{\frac{s-1}{s}}) L^{\frac{s-1}{s}}} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha \cdot \frac{K}{L}^{\frac{s-1}{s}} + (1-\alpha)} \end{aligned}$$

3.4

Vi betragter først udtrykket for K . Vi ser, at tælleren går mod α , når σ går mod 0, da eksponenten går mod 0. Tælleren går mod $\alpha + 1 - \alpha$, hvorfor hele udtrykket går mod α .

Det samme sker i udtrykket for L , her bliver tælleren $(1 - \alpha)$ og nævneren bliver $\alpha + 1 - \alpha$.

Det er klart, at hhv. lønnens andel af den samlede produktion falder, når $\sigma > 1$, idet $\frac{K}{L}^{\frac{s-1}{s}}$ stiger, og står i nævneren på udtrykket. Omvendt vil det være for K . Betragt:

$$\frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha) \cdot \frac{K}{L}^{(-\frac{\sigma-1}{\sigma})}}$$

Altså at en stigning i σ mindsker nævneren og dermed øger arbejdskraftens andel af den samlede indkomst. Intuitionen, når $\sigma > 1$, er, at der efter ændringen er *mindre aftagende grænseprodukt for kapital*. Det skyldes, at:

$$\frac{\delta \ln(MRTS)}{\delta \ln(\frac{K}{L})}$$

falder med mere end 1, dvs. MRTS går f.eks. fra at være $\frac{1}{1}$ til $\frac{3}{1}$, svarende til, at kapitalens marginalprodukt bliver større.