

Mikroøkonomi I: Ugeseddel 6

Levi van Boekel

Uge 41, 2024

Opgave 1

Vi betragter en forbruger med indkomst, I . I udgangspunktet er priserne, p , men ændres så til p' .

1.1

Hvis den kompenserende variation for prisændringen er 100 kr, betyder det, at forbrugeren skal kompenseres med 100 kr. for at kunne opnå samme nytteniveau (dvs. have en budgetlinje, der tangerer samme indifferenskurve) efter prisstigningerne, som han havde før prisstigningerne. En positiv CV betyder altså, at forbrugeren i tilfælde af prisstigningerne var dårligere stillet, idet han skal kompenseres for at kunne opnå samme nytteniveau.

1.2

Hvis den ækvivalerende variation for prisændringen er 100 kr, betyder det, at forbrugeren kunne have 100 kr. mindre i indkomst før prisstigningerne for at have samme nytteniveau, som han har med de nye priser og sin rigtige indkomst. Hvis den ækvivalerende variation er positiv, er forbrugere dårligere stillet efter prisstigningerne, idet han ved de oprindelige priser kan nøjes med en lavere indkomst, og vice versa hvis EV er negativ (her vil forbrugeren skulle have 100 kr. mere i udgangspunktet for at opnå samme nytteniveau, hvorfor han er bedre stillet ved de nye priser).

Opgave 2

Susse har nyttefunktionen

$$u^S(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad (1)$$

Mens Konny har Nyttfunktionen:

$$u^K(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad (2)$$

2.1

Vi ser, at Susses præference beskriver perfekte substitutter, idet MRS er konstant, vi kender altså godt hendes optimale efterspørgsel. Alligvel opstiller vi problemet og løser det med Lagrange. Vi ved, at MRS er givet ved:

$$MRS = 1 \quad (3)$$

Hvorfor der ikke er essentialitet i nogle varer, og der kan være randløsninger i begge ender (som forventet). Vi ved samtidig, at funktionen er differentiabel, indifferenskurverne er konvekse og strengt monotone (alle punkter nordøst for et givet punkt ligger i det indre af den ydre konturmængde). Vi får:

$$1 - \lambda p_1 = 0 \quad (4)$$

$$1 - \lambda p_2 = 0 \quad (5)$$

$$m - x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0 \quad (6)$$

Vi får altså $p_1 = p_2$ af 4 og 5. I den indre løsning vil det da gælde, at $x_1 p_1 + x_2 p_2 = m$ er optimal, når $p_1 = p_2$. Da der kan være randløsninger må vi tjekke, hvornår den er i venstre side:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) &> u\left(\frac{m}{p_2}, 0\right) \\ \frac{m}{p_1} &> \frac{m}{p_2} \\ p_1 &< p_2 \end{aligned}$$

Og i højre side:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{m}{p_1}, 0\right) &< u\left(\frac{m}{p_2}, 0\right) \\ \frac{m}{p_1} &< \frac{m}{p_2} \\ p_1 &> p_2 \end{aligned}$$

Marshall efterspørgslen er:

$$(x_1, x_2)_S^* = \begin{cases} \left\{\frac{m}{p_1}\right\} & \text{hvis } p_1 < p_2 \\ \{x_1, x_2 \in x_1 p_1 + x_2 p_2 = m\} & \text{hvis } p_1 = p_2 \\ \left\{\frac{m}{p_2}\right\} & \text{hvis } p_1 > p_2 \end{cases} \quad (7)$$

Vi ser, at Konnys præferencer beskriver perfekte komplementær i forholdet 1:1 (Leontiff præfer-

encer). Her kan vi ikke bruge Lagrange, i stedet indser vi blot, at der må gælde, $x_1 = x_2$. Da bliver Marshall efterspørgslen :

$$(x_1, x_2)_K^* = x_1 p_1 + x_1 p_2 = m \longleftrightarrow x_1^* = x_2^* = \frac{m}{p_1 + p_2} \quad (8)$$

Deres efterspørgsel $p_1 = 1$ og $p_2 = 3$ bliver da:

$$x_{1S}^* = 120 \quad \text{fordi } p_1 < p_2 \quad (9)$$

$$x_{2S}^* = 0 \quad \text{fordi } p_1 < p_2 \quad (10)$$

$$x_{1K}^* = \frac{120}{1+3} = 30 \quad (11)$$

$$x_{2K}^* = \frac{120}{1+3} = 30 \quad (12)$$

2.2

Nytniveauet for Sussy er:

$$u_S^*(120, 0) = 120 \quad (13)$$

Mens nytniveauet for Konny er

$$u_K^*(30, 30) = 30 \quad (14)$$

På baggrund af nytteforskellen kan man ikke sige noget om, hvem af de to, der er bedre stillet, idet nytte er et ordinalt begreb, der bruges til at rangordne forbrugsplaner indbyrdes for forbrugeren. Ingen af de to agenter er misundelige på hinandens forbrug, idet de begge nyttemaksimerer under de samme priser og dermed vælger det forbrugsbundt, der giver dem den højeste nytte. Det ses også let ved indsættelse, da Konnies nytte er vil være 0 og Sussys vil være 60, hvilket er strengt mindre end hhv. 30 og 120.

2.3

2.3.1 Sussy (Slutsky)

Den samlede ændring i efterspørgslen efter mad og bolig som følge af prisstigningerne bliver:

$$\Delta_{\text{samlet}} = (60, 0) - (120, 0) = (-60, 0) \quad (15)$$

Vi ønsker nu at dele effekten op i både substitutions- og indkomsteffekten. For at bestemme substitutionseffekten foretager vi en Slutsky kompensation for forbrugeren. Da:

$$m' = 120 \cdot 2 + 0 = 240 \quad (16)$$

Substitutionseffekten bliver da: $x^*(p'_1, p_2, m') - x^*(p_1, p_2, m)$

$$\Delta_S = (120, 0) - (120, 0) = 0 \quad (17)$$

Vi finder nu indkomsteffekten som: $x^*(p'_1, p_2, m') - x^*(p'_1, p_2, m)$. Det vil sige:

$$\Delta_I = (60, 0) - (120, 0) = (-60, 0) \quad (18)$$

Hele Sussys efterspørgselsændring skyldes da indkomsteffekten, hvilket giver intuitivt mening, idet det stadigvæk gælder, at $p_1 < p_2$ efter prisstigningerne.

2.3.2 Sussy (Hicks)

For at finde den Hicks kompenserende efterspørgsel for Sussy, skal vi løse følgende udgiftsminimeringsproblem:

$$\min_{x_1, x_2} x_1 p_1 + x_2 p_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 + x_2 = u \quad (19)$$

Det er klart, at vi ikke kan bruge Lagrange hertil. I stedet præsenterer jeg en generel metode, der altid kan bruges til at løse problemer af ovenstående form, dvs. også med andre koefficienter. Indledningsvist bruger vi bibetingelsen til at udtrykke x_1 , da:

$$x_1 = u - x_2 \quad (20)$$

Vi indsætter nu i den objektive funktion:

$$\begin{aligned} &(u - x_2)p_1 + x_2 p_2 \\ &u p_1 - x_2 p_1 + x_2 p_2 \\ &u p_1 + x_2 (p_2 - p_1) \end{aligned}$$

Vi kan nu ved inspektion se, at udtrykket bliver minimeret ved $x_2 = 0$, hvis $p_2 > p_1$, og ved $x_1 = 0$, hvis $p_1 > p_2$. De tilhørende værdier af x_1 og x_2 findes ved indsættelse i bibetingelsen, dvs. $x_2 = u$ og $x_1 = u$. Hvis $p_1 = p_2$ er alle værdier af x_1 og x_2 , der opfylder bibetingelsen mulige svar. Den Hicks kompenserede efterspørgsel bliver altså:

$$X^H(p_1, p_2, u) = \begin{cases} (u, 0) & \text{hvis } p_2 > p_1 \\ x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 = u & \text{hvis } p_2 = p_1 \\ (0, u) & \text{hvis } p_2 < p_1 \end{cases} \quad (21)$$

Vi bestemmer nu substitutionseffekten som: $x_*^h(p'_1, p_2, u') - x_*(p_1, p_2, u)$. Dvs:

$$\Delta_S = (120, 0) - (120, 0) = (0, 0) \quad (22)$$

Vi kan herefter bestemme indkomsteffekten som: $x_*(p'_1, p_2, u) - x_*^h(p'_1, p_2, u')$. Dvs:

$$\Delta_S = (60, 0) - (120, 0) = (-60, 0) \quad (23)$$

Som er det samme svar som førhen.

2.3.3 Konny (Slutsky)

Den samlede ændring i efterspørgslen efter mad og bolig som følge af prisstigningerne bliver:

$$\Delta_{\text{samlet}} = (24, 24) - (30, 30) = (-6, 6) \quad (24)$$

Vi ønsker nu at dele effekten op i både substitutions- og indkomsteffekten. For at bestemme substitutionseffekten foretager vi en Slutsky kompensation for forbrugeren. Da:

$$m' = \frac{x}{5} = 30 \longleftrightarrow m' = 150 \quad (25)$$

Substitutionseffekten bliver da: $x^*(p'_1, p_2, m') - x^*(p_1, p_2, m)$

$$\Delta_S = (30, 30) - (30, 30) = 0 \quad (26)$$

Vi finder nu indkomsteffekten som: $x^*(p'_1, p_2, m') - x^*(p'_1, p_2, m)$. Det vil sige:

$$\Delta_I = (24, 24) - (30, 30) = (-6, -6) \quad (27)$$

Hele Konnys efterspørgselsændring skyldes da indkomsteffekten, hvilket giver intuitivt mening, idet der er tale om perfekte komplement, og der da per definition ikke er en substitutionseffekt.

2.3.3 Konny (Hicks)

For at finde den Hicks kompenserende efterspørgsel for Konny, skal vi løse følgende udgiftsminimeringsproblem:

$$\min_{x_1, x_2} x_1 p_1 + x_2 p_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \min(x_1, x_2) = u \quad (28)$$

Vi kan heller ikke her bruge Lagrange. I stedet ved vi, at der må gælde, at $x_1 = x_2$ for at opnå et givent nytteniveau billigst muligt. Altså:

$$\begin{aligned} \min(x_1, x_1) &= u \\ x_1 &= u \end{aligned}$$

Og idet, $x_1 = x_2$, gælder det, at:

$$X^H(p_1, p_2, u) = (u, u) \quad (29)$$

Vi definerer nu substitutionseffekten som: $x_*^h(p'_1, p_2, u') - x_*(p_1, p_2, u)$:

$$\Delta_S = (30, 30) - (30, 30) = 0 \quad (30)$$

Mens indkomsteffekten er: Vi definerer nu substitutionseffekten som: $x_*(p'_1, p_2, u) - x_*^h(p'_1, p_2, u')$:

$$\Delta_I = (24, 24) - (30, 30) = (-6, -6) \quad (31)$$

Som igen er det samme som førhen.

2.4

2.4.1 Sussy

Vi definerer den kompenserende variation som forskellen mellem den indkomst, der er nødvendig for at opnå det gamle nytteniveau ved de nye priser, og den oprindelige indkomst. Dvs:

$$CV = E[p', u^{\text{oprindelig}}] - E \quad (32)$$

Fortolkningen er, at den kompenserende variation angiver, hvor meget indkomst forbrugeren skal kompenseres for at opnå det samme nytteniveau ved de nye priser, som han havde ved de gamle priser. Hvis $CV > 0$, er forbrugeren dårligere stillet ved de nye priser, idet han her vil skulle modtage et positivt beløb for at kunne have en tilstrækkelig indkomst til at opnå samme nytteniveau som førhen. Hvis CV, omvendt, er negativ, betyder det, at en mindre indkomst er nødvendig ved de nye priser, hvorfor han her er bedre stillet.

Vi definerer den ækvivalerende variation som forskellen mellem den oprindelige indkomst, og indkomsten, der er nødvendig for at opnå det nye nytteniveau ved de gamle priser. Da:

$$EV = E - E[p, u'] \quad (33)$$

Fortolkningen er, at EV angiver, hvor meget indkomst forbrugeren er villig til at opgive, for at have det nye nytteniveau ved de gamle priser. Hvis $EV > 0$ betyder det, at forbrugeren er værre stillet under de nye priser, idet han skal bruge mindre indkomst ved de oprindelige priser for at få det nye nytteniveau, svarende til, at han har været fået mindre nytte. Hvis $EV < 0$ gælder det omvendte, idet han har ville skulle bruge en højere indkomst for at få den nye nytte ved de gamle priser, svarende til, at han er bedre stillet under de nye priser.

Vi kan beregne begge dele for Sussy. Vi starter med den kompenserende variation. Det nødvendige

budget for at opnå den oprindelige nytte ved de nye priser, er:

$$E[p', u^{\text{oprindelig}}] = 120 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 240 \quad (34)$$

Da:

$$CV = 240 - 120 = 120 \quad (35)$$

Sussy skal altså modtage 120 kr. ekstra i indkomst for at opnå det gamle nytteniveau ved de nye priser. For at finde den ækvivalerende indkomst bestemmer vi først den indkomst, som Sussy skal ved de gamle priser, for at få det nye nytteniveau. Vi bruger hertil hendes Hicks kompenserede efterspørgselsfunktion og får:

$$E[p, u'] = 60 \cdot 1 = 60 \quad (36)$$

Og får da:

$$EV = 120 - 60 = 60 \quad (37)$$

Som tilsiger, at Sussy er villig til at opgive 60 kr. af hendes indkomst under de oprindelige priser, for at få det samme forbrugsbundt ved de nye priser og være indifferent. Vi kunne i begge tilfælde lige så vel have taget integralet fra $p_1 = 1$ til $p_1 = 2$ for de hicks kompenserede efterspørgsler. Her ville vi have fået samme svar, da:

$$CV = \int_1^2 120 dp_1 = [120p_1]_1^2 = 240 - 120 = 120 \quad (38)$$

$$EV = \int_1^2 60 dp_1 = [60p_1]_1^2 = 120 - 60 = 60 \quad (39)$$

Hvis vi skal bestemme ændringen i forbrugeroverskuddet er det nyttigt at betragte nedenstående principskitse.

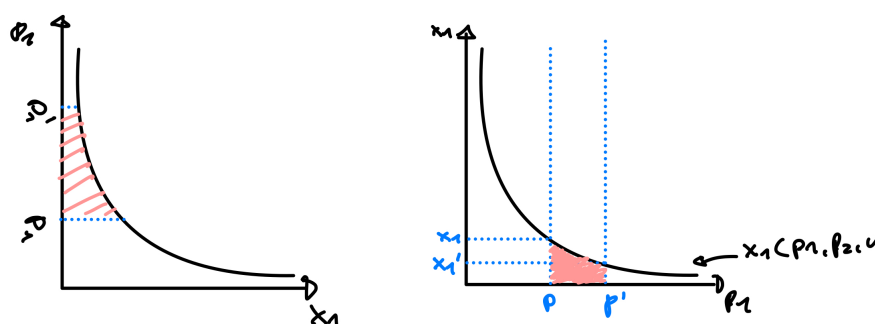


Figure 1: Principskitse af ændringen i CS

Vi ønsker da at beregne arealet fra p_1 til p_1' på venstre figur. Ved at invertere akserne, får vi kurven på en form, så vi kan bestemme et integral, der afhænger af p_1 . Da der er tale om et tab i CS sætter

vi et minus foran. Vi har da:

$$\begin{aligned}
 -\Delta CS &= - \int_{p_{\text{gammel}}}^{p_{\text{ny}}} x_1^*(p_1, p_2, u) dp_1 \\
 &= - \int_1^2 \frac{m}{p_1} dp_1 \quad \text{fordi } p_1 < 3 \\
 &= -m \cdot [\ln(2) - \ln(1)] \\
 &= -120 \cdot \ln(2) \approx -83.2 \quad \text{med opgavens værdier}
 \end{aligned}$$

2.4.2 Konny

Vi gør nu begge dele igen, blot hurtigere. Vi starter med at bestemme det nødvendige budget for at opnå den oprindelige nytte ved de nye priser, ved at huske tilbage til, at den hicks kompenserede efterspørgsel er (u, u) . Da:

$$E[p', u^{\text{oprindelig}}] = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 150 \quad (40)$$

Den kompenserende variation er nu:

$$CV = 150 - 120 = 30 \quad (41)$$

Som vi alternativt havde kunne udregne som:

$$CV = \int_1^2 30p_1 + \int_3^3 30p_2 = [30p_1]_1^2 + [30p_2]_3^3 = 60 - 30 = 30 \quad (42)$$

Vi bestemmer nu den kompenserende variation. Vi skal starte med at bestemme:

$$h(p_1, p_2, u') = (24, 24) \quad (43)$$

Hvor:

$$E[p', u^{\text{oprindelig}}] = 24 \cdot 1 + 24 \cdot 3 = 96 \quad (44)$$

Hvorfor den ækvivalerende variation er lig:

$$EV = 120 - 96 = 24 \quad (45)$$

Som vi igen ville have kunnet regnet ud som et integral, da:

$$EV = \int_1^2 24p_1 + \int_3^3 24p_2 = [24p_1]_1^2 + [24p_2]_3^3 = 48 - 24 = 24 \quad (46)$$

Vi bestemmer nu ændringen i forbrugers overskuddet på samme møde som førhen:

$$\begin{aligned}
 -\Delta CS &= - \left(\int_{p^{\text{gammel}}}^{p^{\text{ny}}} x_1^*(p_1, p_2, u) dp_1 + \int_{p^{\text{gammel}}}^{p^{\text{ny}}} x_2^*(p_1, p_2, u) dp_2 \right) \\
 &= - \left(\int_1^2 \frac{m}{p_1 + p_2} dp_1 + \int_3^3 \frac{m}{p_1 + p_2} dp_1 \right) \\
 &= - \int_1^2 \frac{m}{p_1 + p_2} dp_1 \\
 &= -m \cdot [\ln(p_1 + p_2)]_1^2 \\
 &= -120 \cdot [\ln(2 + 3) - \ln(1 + 3)] \text{ med opgavens værdier} \\
 &= -120 \cdot 0.2231 \approx -26.7
 \end{aligned}$$

2.5

De tre mål er ikke ens, da de hhv. måler, (1) hvor mange kr. en forbruger kræver mere i sit budget som følge af en prisændring for at opnå samme nytte (*CV*), (2) hvor mange kr. en forbruger er villig til at opgive af sit nuværende budget for at få samme nytteniveau ved nye priser (*EV*) og (3) ændringen i den samlede velfærd for en forbruger på markedet (ΔCS).

CV, *EV* og ΔCS er alle kardinale mål, der er angivet i en enhed, der kan sammenlignes mellem forbrugere (her kr. eller ændringen i velfærd). Vi kan altså se, at Sussy er værre stillet på alle tre parametre, da hun (1) skal kompenseres flere kr. for at være lige så godt stillet med de nye priser, (2) er villig til at opgive en større indkomst for at være indifferent $x(p'_1, p_2, m)$ og $x(p_1, p_2, m')$ og (3) opnår et større velfærdstab.

2.6

2.6.1 Sussy (Slutsky)

Efterspørgslen ved de nye priser bliver:

$$\mathbf{x} = (0, \frac{120}{3}) = (0, 40) \quad (47)$$

Den samlede effekt er da:

$$\Delta = (0, 40) - (60, 0) = (-60, 40) \quad (48)$$

For at dekomponere i indkomst og substitutionseffekt, bestemmer vi den kompenserende indkomst. Dvs:

$$m' = 0 \cdot 3 + 60 \cdot 5 = 300 \quad (49)$$

Substitutionseffekten er nu: $\mathbf{x}_*^S(p'_1, p_2, m') - \mathbf{x}_*(p_1, p_2, m)$:

$$\Delta_S = (0, 100) - (60, 0) = (-60, 100) \quad (50)$$

Indkomsteffekten er nu: $\mathbf{x}_*(p'_1, p_2, m) - \mathbf{x}_*^S(p'_1, p_2, m')$:

$$\Delta_S = (0, 40) - (0, 100) = (0, -60) \quad (51)$$

2.6.2 Sussy (Hicks)

For at dekomponere i indkomst og substitutionseffekt, bestemmer vi det Hicks kompenserende forbrug. Da, det gælder, at $p_2 < p_1$ er det givet ved $(0, u)$. Da

$$\mathbf{x}^H = (0, 60) \quad (52)$$

Substitutionseffekten er nu: $\mathbf{x}_*^H(p'_1, p_2, u') - \mathbf{x}_*(p_1, p_2, u)$:

$$\Delta_S = (0, 60) - (60, 0) = (-60, 60) \quad (53)$$

Indkomsteffekten er nu: $\mathbf{x}_*(p'_1, p_2, u) - \mathbf{x}_*^H(p'_1, p_2, u')$:

$$\Delta_S = (0, 40) - (0, 60) = (0, -20) \quad (54)$$

Indkomsteffekten med Hicks er altså mindre negativ, mens substitutionseffekten er mindre positiv (for x_1).

2.6.3 Konny (Slutsky)

Efterspørgslen ved de nye priser bliver:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{120}{5+3}, \frac{120}{5+3} \right) = (15, 15) \quad (55)$$

For at dekomponere i indkomst og substitutionseffekt, bestemmer vi den kompenserende indkomst. Dvs:

$$m' = 24 \cdot 3 + 24 \cdot 5 = 192 \quad (56)$$

Substitutionseffekten er nu: $\mathbf{x}_*^S(p'_1, p_2, m') - \mathbf{x}_*(p_1, p_2, m)$:

$$\Delta_S = (24, 24) - (24, 24) = (0, 0) \quad (57)$$

Indkomsteffekten er nu: $\mathbf{x}_*(p'_1, p_2, m) - \mathbf{x}_*^S(p'_1, p_2, m')$:

$$\Delta_S = (15, 15) - (24, 24) = (-9, -9) \quad (58)$$

2.6.3 Konny (Hicks)

Den Hicks kompenserende efterspørgsel er blot $\mathbf{x} = (u, u)$. Substitutionseffekten er derfor: $\mathbf{x}_*^H(p'_1, p_2, u') - \mathbf{x}_*(p_1, p_2, u)$:

$$\Delta_S = (24, 24) - (24, 24) = (0, 0) \quad (59)$$

Indkomsteffekten er nu: $\mathbf{x}_*(p'_1, p_2, u) - \mathbf{x}_*^S(p'_1, p_2, u')$:

$$\Delta_S = (15, 15) - (24, 24) = (-9, -9) \quad (60)$$

2.7

2.7.1 Sussy

Vi bestemmer den kompenserende variation ved at finde udgiften til det forbrugsbundt, der opfylder, at nytten ved de nye priser er det samme. Vi ved fra 2.6, at forbrugsbundtet opfylder $(0, u)$. Da:

$$CV = 60 \cdot 3 - 120 = 60 \quad (61)$$

Forbrugeren kræver altså en kompensation på 180 kr. for at opnå samme nytte efter prisstigningerne, som før prisstigningerne.

For at finde ækvivalerende variation skal vi finde den indkomst, skal vi finde udgiften til det forbrugsbundt ved de gamle priser, der giver forbrugeren den samme nytte som han får efter prisændringerne. Vi ved, at $u' = (0, u) = 40$, hvorfor udgiften vil være:

$$E(p, u') = 40 \cdot 2 \quad (62)$$

Da:

$$EV = 120 - 80 = 40 \quad (63)$$

Forbrugeren er altså villig til at opgive 40 kr. af sin oprindelige indkomst ved de gamle priser, for at være indifferent mellem det og hans nytte ved de nye priser.

Ændringen i forbrugers overskuddet er:

$$\Delta CS = - \left(\int_2^3 \frac{m}{p_1} dp_1 + \int_3^5 0 dp_1 \right) \quad (64)$$

$$= -m \cdot [\ln(3) - \ln(2)] \quad (65)$$

$$= -120 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx -48.6 \quad (66)$$

2.7.2 Konny

Vi ved, at:

$$\mathbf{x}(p'_1, p_2, u) = (24, 24) \quad (67)$$

Udgiften hertil er:

$$24 \cdot 5 + 24 \cdot 3 = 192 \quad (68)$$

Den kompenserende variation er da:

$$CV = 192 - 120 = 72 \quad (69)$$

Forbrugeren kræver altså en kompensation på 72 for at opnå samme nytte efter prisstigningerne, som hun havde før prisstigningerne.

Vi ved, at:

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, u') = (15, 15) \quad (70)$$

Udgiften hertil er:

$$15 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 75 \quad (71)$$

Altså:

$$EV = 120 - 75 = 45 \quad (72)$$

Forbrugeren vil altså stille sig tilfreds med 45 kr. mindre i indkomst ved de gamle priser, sammenlignet at have hendes oprindelige indkomst ved de nye priser. Ændringen i forbrugeroverskuddet er:

$$\Delta CS = - \left(\int_2^3 \frac{m}{p_1 + p_2} dp_1 + \int_3^5 0 dp_1 \right) \quad (73)$$

$$= -m \cdot [\ln(5 + 3) - \ln(2 + 3)] \quad (74)$$

$$= -120 \cdot \ln\left(\frac{8}{5}\right) \approx -56.4 \quad (75)$$

2.8

Myndighederne får intet provenu fra Sussy, da hun ikke længere køber varen, idet hendes præferencer beskriver perfekte substitutter. Når $p_1 > p_2$ - som det er tilfældet efter skatten - vil hun derfor ikke forbruge noget af p_1 . Omvendt er det for Konny, hendes præferencer beskriver perfekte komplementer, og hun vil derfor stadigvæk forbruge vare 1. Hun køber 15 enheder, hvorfor statens provenu her er $15 \cdot 3 = 45$.

Opgave 3

Vi betragter en forbruger med efterspørgselsfunktionen:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 \quad (76)$$

3.1

Indifferenskurverne har formen:

$$k = \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 \longleftrightarrow x_2 = e^{k - \frac{1}{2}x_1} \quad (77)$$

Vi ser, at:

$$x_2' = -\frac{1}{2}e^{k - \frac{1}{2}x_1} < 0 \quad (78)$$

$$x_2'' = \frac{1}{4}e^{k - \frac{1}{2}x_1} > 0 \quad (79)$$

Altså er indifferenskurverne konvekse. Vi ved, at alle punkter nordøst for et givent punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde. Vi ser samtidig, at funktionen er differentiabel og konveks, hvorfor de indre løsninger opfylder, at $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$. Vi finder nu MRS for at tjekke for essentialitet. Da:

$$MRS = \frac{0.5}{\frac{1}{x_2}} = 0.5x_2 \quad (80)$$

Vi ser, at når $x_2 \rightarrow 0$, går $MRS \rightarrow 0$. Der er derfor essentialitet i x_2 , men idet x_1 slet ikke indgår, ved vi, at der ikke er essentialitet her.

Vi finder nu de indre løsninger, hvor vi erstatter $\leq$ med $=$, idet præferencerne er strengt monotone.

Da:

$$\max_{x_1, x_2} \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1p_1 + x_2p_2 = m \quad (81)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \ln x_2 + \lambda(m - x_1p_1 - x_2p_2) \quad (82)$$

FOC er:

$$\frac{1}{2} - \lambda p_1 = 0 \quad (83)$$

$$\frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (84)$$

$$x_1p_1 + x_2p_2 = m \quad (85)$$

Vi dividerer 82 og 83:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_2 &= \frac{2p_1}{p_1} \\ x_2 &= \frac{p_1}{p_2}\end{aligned}\tag{86}$$

Vi indsætter i budgetbetingelsen og løser for x_1 :

$$\begin{aligned}x_1p_1 + \frac{2p_1}{p_2}p_2 &= m \\ x_1p_1 + 2p_1 &= m \\ x_1p_1 &= m - 2p_1 \\ x_1 &= \frac{m - 2p_1}{p_1}\end{aligned}$$

For en indre løsning skal det gælde, at:

$$\begin{aligned}\frac{m - 2p_1}{p_1} &> 0 \\ m - 2p_1 &> 0 \quad \text{idet } p_1 > 0 \\ m &> 2p_1\end{aligned}$$

Marshall efterspørgslen er da:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \left(\frac{m-2p_1}{p_1}, \frac{2p_1}{p_2} \right) & \text{hvis } m > 2p_1 \\ \left(0, \frac{m}{p_2} \right) & \text{ellers} \end{cases}\tag{87}$$

3.2

Ved en initial indkomst på $m = 5000$ og priser $p_1 = 75$ og $p_2 = 30$, har vi:

$$5000 > \frac{1}{2}75\tag{88}$$

Hvorfor vi er i en indre løsning. Efterspørgslen er da:

$$x_1^* = \frac{5000 - 2 \cdot 75}{75} \approx 64.6\tag{89}$$

$$x_2^* = \frac{2 \cdot 75}{30} \approx 5\tag{90}$$

Med nytte:

$$u(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \cdot 64.6 + \ln(5) \approx 33.9\tag{91}$$

3.3

Vi opstiller nu Hicks minimeringsproblemet for at beregne den kompenserende og ækvivalerende kompensation. Da:

$$\min_{x_1, x_2} x_1 p_1 + x_2 p_2 \quad \text{u.b.b.} \quad \frac{1}{2}x_1 + \ln(x_2) = u \quad (92)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \lambda(u - \frac{1}{2}x_1 - \ln(x_2)) \quad (93)$$

Med FOC:

$$p_1 - \frac{1}{2}\lambda = 0 \quad (94)$$

$$p_2 - \frac{1}{x_2}\lambda = 0 \quad (95)$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \ln(x_2) = u \quad (96)$$

Vi dividerer 94 og 95, og får:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{2p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Vi indsætter i 96 for at finde x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) &= u \\ \frac{1}{2}x_1 &= u - \ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) \\ x_1 &= 2u - 2\ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) \end{aligned}$$

Den Hicks kompenserende efterspørgselsfunktion er da:

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, u) = \left(2u - 2\ln\left(\frac{2p_1}{p_2}\right), \frac{2p_1}{p_2}\right) \quad (97)$$

For at bestemme det kompenserende forbrug, skal vi finde:

$$\mathbf{x}^h(75, 50, 776.8) = (2 \cdot 33.9 - 2\ln(3), 3) = (65.6, 3) \quad (98)$$

Her er udgiften:

$$E(p', u) = 65.6 \cdot 75 + 3 \cdot 50 \approx 5076.2 \quad (99)$$

CV er da:

$$CV \approx 5070 - 5000 \approx 76.6 \quad (100)$$

Eller som integral:

$$\begin{aligned} CV &= \int_{30}^{50} x_2^h(75, p_2, u^g) dp_2 \\ &= 2p_1 \cdot \int_{30}^{50} \frac{1}{p_2} dp_2 \\ &= 150 \cdot [\ln(50) - \ln(30)] \approx 76.62 \end{aligned}$$

Forbrugeren skal altså modtage 76.62 kr. mere for at kunne opnå samme nytte ved de nye priser.

For at bestemme det ækvivalerende forbrug udregner vi blot integralet. Da:

$$\begin{aligned} EV &= \int_{30}^{50} x_2^h(75, p_2, u^n) dp_2 \\ &= 76.62 \end{aligned}$$

Forbrugeren er altså villig til at opgive 76.62 kr. af sin oprindelige indkomst ved de oprindelige priser, i stedet for at have sin oprindelige indkomst ved de nye priser. Bemærk, at $CV = EV$ for kvasilineære nyttefunktioner.

3.4

Vi bestemmer tabet i velfærd som integralet:

$$\begin{aligned} -\Delta CS &= - \int_{30}^{50} \frac{2 \cdot 75}{p_2} \\ &= -150 \cdot [\ln(50) - \ln(30)] \\ &\approx -76.62 \end{aligned}$$

Det gælder altså, at $CV = EV = |-\Delta CS|$, når prisen på det ikke lineære gode ændrer sig, da der her ikke er nogen indkomsteffekt.

Opgave 4

Vi har en forbruger med præferencerne:

$$u(x_1, x_2) = 12 \ln(x_1) + x_2 \quad (101)$$

Prisen på $p_2 = 1$ (numeraire), mens prisen på vare 1 initialt er $p_1 = 3$ og herefter stiger til $p'_1 = 6$

4.1

Idet præferencerne er kvasilineære, ved vi, at de er monotone. Vi kan derfor finde den indre løsning ved at løse:

$$\max_{x_1, x_2} 12 \ln(x_1) + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \quad (102)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 12 \ln(x_1) + x_2 + \lambda(m - x_1 p_1 - x_2 p_2) \quad (103)$$

FOC bliver:

$$\frac{12}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (104)$$

$$1 + \lambda p_2 = 0 \quad (105)$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \quad (106)$$

Vi dividerer 104 og 105:

$$\begin{aligned} \frac{12}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_1 &= \frac{12 p_2}{p_1} \end{aligned}$$

Vi indsætter nu i budgetbetingelsen for at finde x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{12 p_2}{p_1} \cdot p_1 + x_2 p_2 &= m \\ 12 p_2 + x_2 p_2 &= m \\ x_2 p_2 &= m - 12 p_2 \\ x_2 &= \frac{m - 12 p_2}{p_2} \end{aligned}$$

Den indre efterspørgsel er da:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{12 p_2}{p_1}, \frac{m - 12 p_2}{p_2} \right) \quad (107)$$

For $p_2 = 1$, bliver det vil:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{12}{p_1}, m - 12 \right) \quad (108)$$

4.2

Vi finder den Hicks kompenserede efterspørgsel:

$$\min_{x_1, x_2} x_1 p_1 + x_2 p_2 \quad \text{u.b.b.} \quad 12 \ln x_1 + x_2 = u \quad (109)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(u - 12 \ln x_1 - x_2) \quad (110)$$

FOC:

$$p_1 - \lambda \frac{12}{x_1} = 0 \quad (111)$$

$$p_2 - \lambda = 0 \quad (112)$$

$$u - 12 \ln x_1 - x_2 = 0 \quad (113)$$

Vi dividerer 111 og 112:

$$\frac{12}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (114)$$

$$x_1 = \frac{12p_2}{p_1} \quad (115)$$

$$= \frac{12}{p_1} \quad \text{med } p_2 = 1 \quad (116)$$

Vi indsætter i bibetingelsen:

$$\begin{aligned} 12 \ln \frac{12p_2}{p_1} + x_2 &= u \\ x_2 &= u - \left(12 \ln \frac{12p_2}{p_1}\right) \\ &= u - (12 \ln(12) - 12 \ln(p_1)) \quad \text{med } p_2 = 1 \\ &= u + 12 \ln(p_1) - 12 \ln(12) \end{aligned}$$

Den Hicks kompenserende efterspørgsel er da:

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, u) = \left(\frac{12}{p_1}, u + 12 \ln(p_1) - 12 \ln(12) \right) \quad (117)$$

Den kompenserende indkomst er defineret til: $CV = E(p', u) - E$, da:

$$\begin{aligned} CV &= 12 \int_3^6 \frac{1}{p_1} dp_1 \\ &= 12 \cdot [\ln(6) - \ln(3)] \approx 8.3 \end{aligned}$$

Forbrugeren skal altså kompenseres med 8.3 kr. for at opnå sit oprindelige nytteniveau med de nye priser.

Den ækvivalerende indkomst er defineret til: $CV = E - E(p, u')$, da:

$$\begin{aligned} EV &= 12 \int_3^6 \frac{1}{p_1} dp_1 \\ &= 12 \cdot [\ln(6) - \ln(3)] \approx 8.3 \end{aligned}$$

Forbrugeren er altså villig til at opgive 8.3 kr. af sit oprindelige budget ved de gamle priser for at få samme nytte som ved hans oprindelige budget og de nye priser. Bemærk, vi ville ligeledes have kunne beregnet dette (og CV) ved:

$$EV = E - E[p, u']$$

Vi skal her først bestemme efterspørgslen ved de nye priser:

$$\mathbf{x}(6, 1, 40) = (2, 28) \quad (118)$$

Her er nytten:

$$u(2, 28) = 12 \cdot \ln(2) + 28 \approx 36.31 \quad (119)$$

Vi kan nu bestemme $\mathbf{x}^h(3, 1, 36.31)$:

$$\begin{aligned} x_1^h &= 4 \\ x_2^h &= 12 \ln(3) - 12 \ln(12) \approx 19.67 \end{aligned}$$

Den ækvivalerende variation er da:

$$EV = 4 \cdot 3 + 19.67 - 40 \approx 8.33$$

Faldet i CS bestemmes som:

$$\begin{aligned} -\Delta CS &= 12 \int_3^6 \frac{1}{p_1} dp_1 \\ &= 12 \cdot [\ln(6) - \ln(3)] \approx 8.3 \end{aligned}$$

Opgave 5

Opgaven løses lidt hurtigere.

5.1

Vi ved, at der ikke er nogen randløsninger, da der er CD præferencer. Derfor vi ved vi ligeledes, at præferencerne er monotone. Vi har altså følgende maksimeringsproblem:

$$\max_{x_1, x_2} 2 \ln x_1 + 3 \ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (120)$$

Lagrange:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 2 \ln x_1 + 3 \ln x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) \quad (121)$$

FOC:

$$\frac{2}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (122)$$

$$\frac{3}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (123)$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (124)$$

Vi dividerer 122 med 123:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x_1} \cdot \frac{x_2}{3} &= \frac{p_1}{p_2} \\ 2x_2 &= \frac{3x_1 p_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{3x_1 p_1}{2p_2} \end{aligned}$$

Vi indsætter i budgetbetingelsen:

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 \cdot \frac{3x_1 p_1}{2p_2} &= m \\ p_1 x_1 + \frac{3x_1 p_1}{2} &= m \\ 2p_1 x_1 + 3x_1 p_1 &= 2m \\ x_1 &= \frac{2m}{5p_1} \end{aligned}$$

Og tilbage i budgetbetingelsen:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3 \frac{2m}{5p_1} p_1}{2p_2} \\ &= \frac{\frac{6m}{5}}{2p_2} \\ &= \frac{6m}{10p_2} = \frac{3m}{5p_2} \end{aligned}$$

Vi finder nu den Hicks kompenserende efterspørgsel:

$$\min_{x_1, x_2} x_1 p_1 + x_2 p_2 \quad \text{u.b.b.} \quad 2 \ln x_1 + 3 \ln x_2 = u \quad (125)$$

Lagrange:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \lambda(u - 2 \ln x_1 - 3 \ln x_2) \quad (126)$$

FOC:

$$p_1 - \lambda \frac{2}{x_1} = 0 \quad (127)$$

$$p_2 - \lambda \frac{3}{x_2} = 0 \quad (128)$$

$$u - 2 \ln x_1 - 3 \ln x_2 = 0 \quad (129)$$

Vi dividerer 127 og 128:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{x_1} \frac{x_2}{3} \quad (130)$$

$$\frac{2x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (131)$$

$$2x_2 = \frac{3x_1 p_1}{p_2} \quad (132)$$

$$x_2 = \frac{3x_1 p_1}{2p_2} \quad (133)$$

Vi indsætter nu i budgetbetingelsen for at finde x_1^h :

$$\ln(x_1) + 3 \ln(3x_1 p_1) - 3 \ln(2p_2) = u \quad (134)$$

$$2 \ln x_1 + 3 (\ln 3 + \ln p_1 + \ln x_1 - \ln 2 - \ln p_2) = u \quad (135)$$

$$5 \ln x_1 + 3 \ln 3 + 3 \ln p_1 - 3 \ln 2 - 3 \ln p_2 = u \quad (136)$$

$$5 \ln x_1 = u - 3 \ln 3 + 3 \ln 2 - 3 \ln p_1 + 3 \ln p_2 \quad (137)$$

$$\ln x_1 = \frac{u}{5} + \frac{3}{5} (\ln 2 - \ln 3 + \ln p_2 - \ln p_1) \quad (138)$$

$$\ln x_1 = \frac{u}{5} + \frac{3}{5} \ln \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right) \quad (139)$$

$$x_1 = \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (140)$$

Vi indsætter tilbage:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3p_1}{2p_2} \cdot \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right)^{\frac{3}{5}} \\ x_2 &= \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{1-\frac{3}{5}} \\ &= \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Den Hicks kompenserende efterspørgsel er da:

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, u) = \left(\exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right)^{\frac{3}{5}}, \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{\frac{2}{5}} \right) \quad (141)$$

5.2

Den kompenserende og ækvivalernede variation er:

$$\begin{aligned} CV/EV &= \int_{p_1}^{p_1'} \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right)^{\frac{3}{5}} dp_1 \\ &= \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3} \right)^{\frac{3}{5}} \int_{p_1}^{p_1'} p_1^{-\frac{3}{5}} dp_1 \end{aligned}$$

Integralet bliver:

$$\int_{p_1}^{p_1'} p_1^{-\frac{3}{5}} dp_1 = \left[\frac{p_1^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} \right]_{p_1}^{p_1'} = \frac{5}{2} \left(p_1'^{\frac{2}{5}} - p_1^{\frac{2}{5}} \right)$$

Da:

$$CV/EV = \exp \left(\frac{u}{5} \right) \left(\frac{2p_2}{3} \right)^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{5}{2} \left(p_1'^{\frac{2}{5}} - p_1^{\frac{2}{5}} \right) \quad (142)$$

Alt afhængigt af, hvilke input vi giver, har vi nu både CV og EV . Hvis vi sætter $u = u^g$, får vi CV , mens vi får EV , hvis vi sætter $u = u^n$.

Ændringen i forbrugeroverskuddet er nu:

$$\begin{aligned}\Delta CS &= - \int_{p_1}^{p_1'} x_1^m(p_1, p_2, m) dp_1 \\ &= - \int_{p_1}^{p_1'} \frac{2m}{5p_1} dp_1 \\ &= -\frac{2m}{5} \cdot - \int_{p_1}^{p_1'} \frac{1}{p_1} dp_1 \\ &= -\frac{2m}{5} \cdot [\ln(p_1)]_{p_1}^{p_1'} \\ &= -\frac{2m}{5} \cdot [\ln(p_1') - \ln(p_1)]\end{aligned}$$