

Mikroøkonomi I: Ugeseddel 7

Levi van Boekel

Uge 43, 2024

Opgave 1

Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(c) = \sqrt{c} \quad c \geq 0 \quad (1)$$

Han står overfor to lotterier, hvor der er hhv. 50 pct. sandsynlighed for 4 og 16, eller 50 pct. sandsynlighed for 1 og 25.

1.1

Den forventede værdi af det første lotteri er: $0.5 \cdot 4 + 0.5 \cdot 16 = 10$, mens den forventede værdi af det andet lotteri er: $0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 25 = 13$.

1.2

Falsk. Det er klart, at forbrugeren ikke (generelt), vil foretrække det lotteri med den højeste forventede værdi, idet det ikke nødvendigvis giver ham den højeste nytte. Det skyldes, at forbrugeren ved nyttefunktionen $\ln(x)$ får meget lav nytte ved at få 0.00001, og den forventede nytte derfor kan være markant lavere end den forventede værdi. Udsagnet er derfor falsk, da forbrugers valg i stedet afhænger af den forventede nytte.

1.3

Den forventede nytte er:

$$\mathbb{E}(U_A) = \frac{1}{2}(\sqrt{4} + \sqrt{16}) = 3 \quad (2)$$

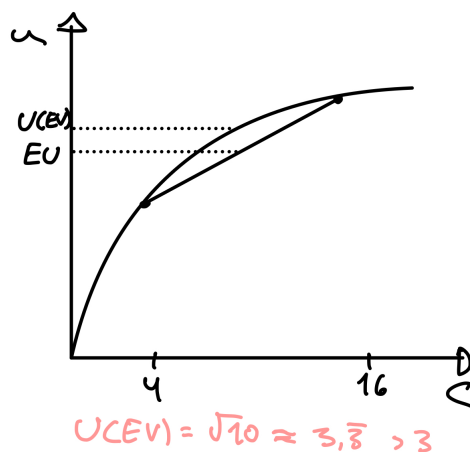
Og:

$$\mathbb{E}(U_B) = \frac{1}{2}(\sqrt{25} + \sqrt{1}) = 3 \quad (3)$$

Hvorfor forbrugeren er indifferent mellem de to lotterier.

1.4

Kvadratrod c er en konkav funktion og som vi ser nedenfor, er $U(EV) > E(U)$, hvorfor forbrugeren er risikoavers. Det stemmer overens med resultatet førhen, idet forbrugeren her er indifferant mellem det første og det andet lotteri, selvom det andet har en højere forventet værdi (men jo har højere risiko).

Figure 1: Principskitse af $u(c)$

1.5

Resultatet er vist nedenfor:

Periode	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	9
	-10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=0.1$	19,04										
$r=0.2$	7,08										
$r=0.3$	0,98										

Figure 2: Beregnede nutidsværdier

Opgave 2

Kim har følgende nyttefunktion for forbrug over to perioder:

$$u(c_1, c_2) = 2 \ln c_1 + 3 \ln c_2. \quad (4)$$

Han tjener 100 kr i periode 1 og 110 kr i periode 2. Inflationen er 2% og Kim kan låne eller spare op til en rente på 5%. Prisniveauet i periode 1 er $p_1 = 1$.

2.1

Kims budgetbegrænsning over de to perioder er:

$$c_1 + \left(\frac{1.02}{1.05}\right) c_2 = 100 + \left(\frac{1}{1.05}\right) \cdot 110 \quad (5)$$

2.2

Vi løser det generelle problem, og indsætter herefter opgavens værdier. Da det er CD præferencer ved vi, at der kun er indre løsninger, og, at disse kan løses med Lagrange, idet præference er strengt monotone (alle punkter nordøst for et givet punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde), samt strengt konvekse (linearkombinationer af to punkter på en indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde) og differentiable, hvorfor den indre løsning er karakteriseret ved $\frac{p_1}{p_2} = |MRS|$, som netop er de løsninger Lagrange finder.

$$\max_{c_1, c_2} 2 \ln c_1 + 3 \ln c_2 \quad \text{u.b.b.} \quad c_1 + \frac{(1 + \pi)}{(1 + r)} c_2 = m_1 + \frac{1}{(1 + r)} m_2 \quad (6)$$

Da bliver Lagrange:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2) = 2 \ln c_1 + 3 \ln c_2 + \lambda \left(m_1 + \frac{1}{1 + r} m_2 - c_1 - \frac{1 + \pi}{1 + r} c_2 \right) \quad (7)$$

Med FOC:

$$\begin{aligned} \frac{2}{c_1} - \lambda &= 0 \\ \frac{3}{c_2} - \lambda \frac{1 + \pi}{1 + r} &= 0 \\ m_1 + \frac{1}{1 + r} m_2 - c_1 - \frac{1 + \pi}{1 + r} c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Fra de første to har vi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{c_1} \cdot \frac{c_2}{3} &= \frac{1 + r}{1 + \pi} \\ \frac{2c_2}{3c_1} &= \frac{1 + r}{1 + \pi} \\ \frac{c_2}{c_1} &= \frac{3}{2} \frac{1 + r}{1 + \pi} \\ c_2 &= \frac{3c_1}{2} \frac{1 + r}{1 + \pi} \end{aligned}$$

Vi indsætter i budgetbegrænsningen:

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{3c_1}{2} \frac{1+r}{1+\pi} \cdot \frac{1+\pi}{1+r} &= m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \\ c_1 + \frac{3c_1}{2} &= m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \\ \frac{5c_1}{2} &= m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \\ c_1 &= \frac{2}{5} \left[m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \right] \end{aligned}$$

Og herefter tilbage i definitionen af c_2 :

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{3}{2} \frac{1+r}{1+\pi} \frac{2}{5} \left[m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{1+r}{1+\pi} \left[m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \right] \end{aligned}$$

Den optimale efterspørgsel i de to perioder er da:

$$(c_1, c_2)^* = \left[\frac{2}{5} \left[m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \right], \frac{3}{5} \frac{1+r}{1+\pi} \left[m_1 + \frac{1}{1+r} m_2 \right] \right] \quad (8)$$

I opgaven har vi givet $m_1 = 100$, $m_2 = 110$, $r = 0.05$ og $p = 0.02$. Da:

$$c_1^* = \frac{2}{5} \cdot \left(100 + \frac{1}{1.05} 110 \right) \approx 81.9 \quad (9)$$

Og:

$$c_2^* = \frac{3}{5} \cdot \frac{1.05}{1.02} \cdot \left(100 + \frac{1}{1.05} \cdot 110 \right) \approx 126.47 \quad (10)$$

Vi ser, at Kim bruger mindre i periode 1 end han tjener. Vi kan validere svaret ved at indsætte i budgetbetingelsen:

$$81.9 + 126.47 \cdot \frac{1.02}{1.05} \approx 204.76 \quad (11)$$

Som netop er lig $100 + \frac{1}{1.05} 110$, hvorfor budgetbetingelsen er opfyldt.

2.3

Kims nye budgetbetingelse bliver:

$$c_1 + \left(\frac{1.2}{1.05} \right) c_2 = 100 + \left(\frac{1}{1.05} \right) \cdot 110 \quad (12)$$

2.4

Kims nye forbrug bliver:

$$c_1^* = \frac{2}{5} \cdot \left(100 + \frac{1}{1.05} 110\right) \approx 81.9 \quad (13)$$

og:

$$c_2^* = \frac{3}{5} \cdot \frac{1.05}{1.2} \cdot \left(100 + \frac{1}{1.05} \cdot 110\right) \approx 107.5 \quad (14)$$

Det er altså kun det fremtidige forbrug, der falder, fordi forbrugers indkomst er blevet mindre værd. Der sker altså ingen substitution som følge af prisstigningen på vare 2, idet krydspriselasticiteten i CD bruger en konstant andel af sin indkomst på de to varer (her perioder).

Opgave 3

Vi betragter følgende tre lotterier:

$$L_1 : \text{To udfald, med ssh. } \frac{1}{2}, \text{ hvor } c = 1 \text{ i den første tilstand og } c = 16 \text{ i den anden.} \quad (15)$$

$$L_2 : \text{Et udfald, hvor } c = 8.5 \text{ med sikkerhed.} \quad (16)$$

$$L_3 : \text{Et udfald, hvor } c = 6 \text{ med sikkerhed.} \quad (17)$$

Og følgende tre forbrugere, A, B og C, med forventet nyttefunktion givet ud fra nyttefunktionerne,

$$u^A(c) = c \quad (18)$$

$$u^B(c) = \sqrt{c} \quad (19)$$

$$u^C(c) = c^{\frac{1}{4}} \quad (20)$$

3.1

De tre nyttefunktioner er vist nedenfor: Vi ser, at forbruger A er risikoneutral, idet linearkombinationer af mellem to punkter på hans nyttefunktion ligger på grafen for nyttefunktionen, hvorfor

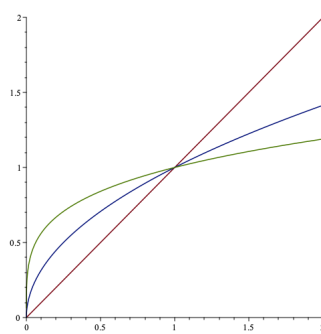


Figure 3: Grafisk visualisering af de tre nyttefunktioner

nationer af mellem to punkter på hans nyttefunktion ligger på grafen for nyttefunktionen, hvorfor

han får lige meget nytte ud af $U(EV) = E(U)$, idet det første er et punkt på grafen og det andet er et punkt på linearkombinationer mellem to punkter, som ligger på grafen. De to andre forbrugere har konkave nyttefunktioner, og er derfor risikoaverse, idet linearkombinationer her ligger under nyttefunktionen, dvs. $U(EV) > E(U)$.

3.2

Vi kan bestemme rangordningen af lotterierne for de forskellige forbrugere ved at betragte den forventede nytte. For forbruger A har vi:

$$E(u^A)_{L_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.5$$

$$E(u^A)_{L_2} = 8.5$$

$$E(u^A)_{L_3} = 6.0$$

Forbrugeren er altså indifferent mellem de første to lotterier, men foretrækker dem begge over det tredje. Vi tjekker nu den anden forbruger:

$$E(u^B)_{L_1} = \frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2.5$$

$$E(u^B)_{L_2} = \sqrt{8.5} = 2.91$$

$$E(u^B)_{L_3} = \sqrt{6} = 2.44$$

Altså: $L_2 \succ L_1 \succ L_3$. Det følger af, at han er risikoavers.

$$E(u^C)_{L_1} = \frac{1}{2}1^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}16^{\frac{1}{4}} = 1.5$$

$$E(u^C)_{L_2} = 8.5^{\frac{1}{4}} = 1.70$$

$$E(u^C)_{L_3} = 6^{\frac{1}{4}} = 1.56$$

Altså: $L_2 \succ L_3 \succ L_1$, han er altså mere risikoavers.

3.3

Vi skal finde sikkerhedsækvivalenten for de tre forbrugere, dvs. det beløb, der gør forbrugeren indifferent (samme nytteniveau), ved at deltage i lotteriet eller modtage beløbet.

$$u(C(\mathcal{L})) = \mathbb{E}(u)_L \quad (21)$$

Vi ved, at den forventede nytte af lotteriet i det første tilfælde er 8.5, og da forbrugeren har lineær nytte, er sikkerhedsækvivalenten her 8.5 ($u(8.5) = \mathbb{E}(u^A)_{L_1} = 8.5$).

For den anden forbruger skal vi opstille følgende ligning:

$$\begin{aligned}\sqrt{c} &= 2.5 \\ c &= 6.25\end{aligned}$$

For den anden forbruger skal vi opstille følgende ligning:

$$\begin{aligned}c^{\frac{1}{4}} &= 1.5 \\ c &= 5.0625\end{aligned}$$

3.4

Den forventede værdi af lotteriet er 8.5. Derfor er risikopræmien for de tre forbrugere:

$$\begin{aligned}\mathcal{RP}_1 &= 8.5 - 8.5 = 0 \\ \mathcal{RP}_2 &= 8.5 - 6.25 = 2.25 \\ \mathcal{RP}_3 &= 8.5 - 5.0625 = 3.4375\end{aligned}$$

Resultaterne flugter fint med de tidligere opgaver, idet forbruger 3 er *mest risikoavers* og forbruger 1 er risikoneutral. Derfor er risikopræmien stigende fra forbruger 1 til forbruger 3.

Opgave 4

4.1

Lotteriet har formen:

$$\begin{aligned}0.99 \text{ ssh. for: } m - \gamma k \\ 0.01 \text{ ssh. for: } m - 200 - \gamma k + k\end{aligned}$$

Hvis forbruget skal være positivt i begge tilfælde må vi kræve:

$$\begin{aligned}m - \gamma k &> 0 \\ m &> \gamma k \\ \frac{m}{\gamma} &> k\end{aligned}$$

og:

$$m - 200 - \gamma k + k > 0$$

$$\begin{aligned}
m - 200 + (-\gamma + 1)k &> 0 \\
-m - 200 &> -k(-\gamma + 1) \\
200 - m &< k(-\gamma + 1) \\
\frac{200 - m}{-\gamma + 1} &< k
\end{aligned}$$

Men idet $200 - m$ er negativt, og vi kun betragter $K \geq 0$, har vi:

$$0 \leq k < \frac{m}{\gamma} \quad (22)$$

Intuitionen er, at at indkomsten er strengt større end tabet ved tyveriet, og forbrugeren derfor skulle have en forsikring, der var større end noget negativt for at have et positivt forbrug.

4.2

Forbrugers problem om at maksimere nytte er:

$$\max_k 0.99 \ln(m - \gamma k) + 0.01 \ln(m - 200 - \gamma k + k) \quad (23)$$

4.3

Førsteordensbetingelsen er:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta k} &= 0 \\
\frac{0.99}{m - \gamma k} \cdot (-\gamma) + \frac{0.01}{m - 200 - \gamma k + k} \cdot (-\gamma + 1) &= 0 \\
\frac{0.01 \cdot (-\gamma + 1)}{m - 200 - \gamma k + k} &= \frac{0.99\gamma}{m - \gamma k} \\
\frac{0.01 \cdot (1 - \gamma)}{m - 200 - \gamma k + k} &= \frac{0.99\gamma}{m - \gamma k} \\
(0.01 - 0.01\gamma)(m - \gamma k) &= 0.99\gamma(m - 200 - \gamma k + k) \\
0.01m - 0.01\gamma k - 0.01\gamma m + 0.01\gamma^2 k &= 0.99\gamma m - 198\gamma - 0.99\gamma^2 k + 0.99\gamma k \\
0.01m - \gamma k - 0.01\gamma m + \gamma^2 k &= 0.99\gamma m - 198\gamma \\
-\gamma k + \gamma^2 k &= \gamma m - 198\gamma - 0.01m \\
k \cdot (-\gamma + \gamma^2) &= \gamma m - 198\gamma - 0.01m \\
k &= \frac{\gamma m - 198\gamma - 0.01m}{(-\gamma + \gamma^2)}
\end{aligned}$$

4.4

Forsikringssummen under de forskellige scenarier er:

	m	m
gamma	500,0	1000,0
0,009	255,9	311,9
0,01	200,0	200,0
0,011	154,2	108,3

Figure 4: Forskellige forsikringspræmier

Vi ser, at forbrugeren vælger at forsikre sig fuldt ud (dvs. $k = 200$), når $\gamma = 0.01$, idet forsikringens forventede indtægter her er lig deres udgifter, og forbrugeren er risikoavers. Omvendt vil forbrugeren vælge at overforsikre sig, hvis forsikringen er mere end fair $\gamma < 0.01$, og vice versa. Forsikringssummen er desuden tiltagende i forbrugers indkomst.

Opgave 5

5.1

Den forventede nytte i de to ordninger er:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = 2.5\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3}\sqrt{1} + \frac{1}{3}\sqrt{25} \approx 2.33$$

Da den forventede nytte er størst i den første pensionsordning, vælges denne.

5.2

Den forventede værdi af de to pensionsordninger er:

$$\mathbb{E}(V) = 2 + 4.5 = 6.5$$

$$\mathbb{E}(V) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}25 = 9$$

For en risikoneutral investor gælder det, at nytten af forventede værdi af lotteriet er lig den forventede nytte af lotteriet. Da det andet lotteri har den højeste forventede værdi - og nytten for en risikoneutral forbruger er lineær - er den forventede nytte også her størst. Den risikoneutral investor vil altså vælge den anden ordning.

5.3

For en risikoelskende investor gælder det, at $U(\mathbb{E}(V)) < \mathbb{E}(U)$. Det betyder, at vedkommende altid har konvekse nyttefunktioner, hvorom det gælder, at den mulighed med mest risiko vælges, da den forventede nytte her er størst. Det kan vi illustrere ved f.eks. at betragte $U = X^2$. Her er

den forventede nytte:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}16 + \frac{1}{2}81 = 48.5$$

$$\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}625 = 208.33$$

Hvorimod nytten af den forventede værdi er:

$$\mathbb{E}(U) = 6.5^2 = 42.25$$

$$\mathbb{E}(U) = 9^2 = 81$$

Investoren vil altså altid vælge den mulighed med mere risiko (da han jo får nytte ud af selve risikoen), hvorfor mulighed 2 vælges her.

5.4

For en risikoavers investor gælder det, at $U(\mathbb{E}(V)) > \mathbb{E}(U)$, hvorfor de altid vil have konkave nyttefunktioner. Hvis skal altså finde en konkav nyttefunktion, hvorom det gælder, at den forventede nytte i det andet lotteri er større end i det første. Lad os f.eks. undersøge $x^{0.99}$. Da:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}4^{0.99} + \frac{1}{2}9^{0.99} \approx 6.37 \mathbb{E}(U) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}9^{0.99} \approx 8.06$$

Der findes altså en risikoavers investor, der vil vælge ordning 2, der findes tilgængelig ingen risikoelskende investor, der vil vælge mulighed 1, da der ikke eksisterer nogen konveks nyttefunktion, hvorom det gælder, at $\mathbb{E}(U_1) > \mathbb{E}(U_2)$. For at indse det, kan vi blot indse, at der her gælder, at x^a , hvor $a \geq 1$ og vi allerede for $a = 1$ i 5.2 har vist, at det ikke gælder her. Når vi øger a , gør vi funktionen mere konveks, dvs. forskellen bliver blot større.

Opgave 6

6.1

Forbrugerens slutformue kan opskrives som følgende:

$$\frac{1}{2}((1+r_g) \cdot x + (w-x)) + \frac{1}{2}((1+r_b) \cdot x + (w-x))$$

$$\frac{1}{2}(r_g x + w) + \frac{1}{2}(r_b x + w)$$

Idet vi kræver, at der aldrig må opstå en situation, hvor forbrugeren har negativ slutformue skal der gælde:

$$r_g x + w \geq 0 \quad \text{altid opfyldt, da } r_g > 0$$

$$r_b x + w \geq 0 \iff x \leq \frac{w}{r_b} \quad \text{i tilfælde af, at } r_b < 0$$

Forbrugerens problem er da:

$$\max_x \frac{1}{2} \ln(r_g x + w) + \frac{1}{2} \ln(r_b x + w) \quad (24)$$

Førsteordensbetingelsen er

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} &= 0 \\ \frac{r_g}{2(r_g x + w)} + \frac{r_b}{2(r_b x + w)} &= 0 \\ \frac{r_g}{2(r_g x + w)} &= -\frac{r_b}{2(r_b x + w)} \\ r_g \cdot (2r_b x + 2w) &= -r_b \cdot (2r_g x + 2w) \\ 2r_g r_b x + 2w r_g &= -2r_b r_g x - 2w r_b \\ r_g r_b x + w r_g &= -r_b r_g x - w r_b \\ r_g r_b x + r_b r_g x &= -w r_b - w r_g \\ x &= \frac{-w r_b - w r_g}{(r_g r_b + r_b r_g)} \\ x &= \frac{-w \cdot (r_b + r_g)}{2r_g r_b} = \frac{w \cdot (r_b + r_g)}{-2r_g r_b} \equiv x^* \end{aligned}$$

Hvor vi bemærker, at udtrykket er negativt, fordi r_b er negativt, og vi derfor stadigvæk får en positiv investeringssum.

6.2

Når $r_b \rightarrow -r_g$ betyder det, at tabet ved investeringen går mod samme størrelse som gevinsten ved investeringen. Når det er tilfældet, går tælleren mod 0, og investeringssummen går derfor mod 0. Det giver intuitivt mening, idet forbrugeren i dette tilfælde ikke får nogen gevinst ud af at investere sine midler. Rent formelt kan vi vise det ved at betragte den forventede formue:

$$\lim_{r_b \rightarrow -r_g} \left(\frac{1}{2}(r_g x + w) + \frac{1}{2}(r_b x + w) \right) = w \quad (25)$$

Han vil altså forvente den samme formue, hvorfor han som risikoavers investor oplagt IKKE vil investere.

6.3

Når $r_b \rightarrow 0$, går tabet ved den dårlige investering mod 0. Derfor vil forbrugerens investering $\rightarrow \infty$. Det ses ved, at nævneren går mod 0. Den forventede formue er da: formue:

$$\lim_{r_b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}(r_g x + w) + \frac{1}{2}(r_b x + w) \right) = w + \frac{1}{2}r_g x \quad (26)$$

Og idet $r_g > 0$ vil det her maksimere forbrugerens formue (og dermed nytte) at maksimere investeringen, da han er garanteret sin oprindelige indkomst og ikke løber nogen risiko.