

Makroøkonomi I: Ugeseddel 3

Levi van Boekel

Uge 40, 2024

Opgave 1

Vi betragter kapitel 5 modellen i kontinuert tid, hvor:

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad (1)$$

$$r = \alpha \left(\frac{K}{AL} \right)^{\alpha-1}, \quad (2)$$

$$w = (1 - \alpha) \left(\frac{K}{AL} \right)^\alpha A, \quad (3)$$

$$S = sY, \quad (4)$$

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad (5)$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad (6)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g. \quad (7)$$

1.1

Vi definerer tilde variablerne som:

$$\tilde{k} = \frac{K_t}{AL_t} = \frac{k_t}{A_t} \quad \text{og} \quad \tilde{y} = \frac{Y_t}{AL_t} = \frac{y_t}{A_t} \quad (8)$$

Hvor vi kan skrive:

$$\begin{aligned} \ln(\tilde{k}) &= \ln(K_t) - \ln(A_t) - \ln(L_t) \\ \frac{\delta}{\delta t} [\ln(\tilde{k})] &= \frac{\delta}{\delta t} [\ln(K_t)] - \frac{\delta}{\delta t} [\ln(A_t)] - \frac{\delta}{\delta t} [\ln(L_t)] \\ \frac{\tilde{k}'}{\tilde{k}} &= \frac{K'_t}{K} - \frac{A'_t}{A} - \frac{L'}{L} \\ \tilde{k}' &= \left[\frac{sY - \delta K}{K} - g - n \right] \tilde{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}' &= \left[\frac{s \cdot (K^\alpha (AL)^{1-\alpha}) - \delta K}{K} - g - n \right] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= \left[\frac{s K^\alpha (AL)^{1-\alpha} - \delta K}{K} - g - n \right] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= [s K^{-1+\alpha} (AL)^{1-\alpha} - \delta - g - n] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= \left[s \left(\frac{AL}{K} \right)^{1-\alpha} - \delta - g - n \right] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= \left[s \left(\left(\frac{K}{AL} \right)^{-1} \right)^{1-\alpha} - \delta - g - n \right] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= [s \tilde{k}^{\alpha-1} - \delta - g - n] \tilde{k} \\ \tilde{k}' &= s \tilde{k}^\alpha - (\delta + g + n) \tilde{k}\end{aligned}$$

Som bortset fra et konstantled, ligner varianten fra diskret tid.

1.2

Solowligningen består af to led, (1) $s\tilde{k}^\alpha$, som angiver, opsparingen i hver periode, idet s er den marginale opsparingsrate og $y = \left(\frac{k}{AL}\right)^\alpha = \tilde{k}^\alpha$. Omvendt angiver det andet led (2), nedslidning, udtynding og væksten i kapital. Solowdiagramet bliver da følgende, idet det første led er en konkav funktion, der skærer førsteaksen over origo. Vi ved dermed, at det første led skærer det andet oppefra, og der dermed vil være konvergens mod $\tilde{k}^*$ som vist nedenfor.

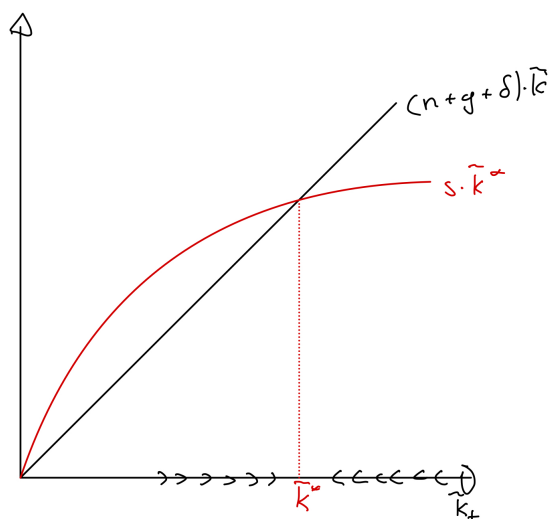


Figure 1: Principskitse af Solowdiagrammet

1.3

Steady state værdien for $\tilde{k}$ findes ved:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_* &= s\tilde{k}_*^\alpha - (\delta + g + n)\tilde{k}_* \\ s\tilde{k}_*^\alpha &= \tilde{k}_* + (\delta + g + n)\tilde{k}_* \\ \tilde{k}_*^{\alpha-1} &= \left(\frac{(\delta + g + n)}{s} \right) \\ \tilde{k}_* &= \left(\frac{(\delta + g + n)}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \tilde{k}_* &= \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Hvorefter $\tilde{y}^*$ findes:

$$\begin{aligned}y^* &= \left(\left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^\alpha \\ y^* &= \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Steady state værdien, og vækststien for de reale lønninger er:

$$w^* = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot g \quad (9)$$

Mens den for reallejesatsen er:

$$\begin{aligned}r^* &= \alpha \cdot \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} \\ r^* &= \alpha \cdot \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{-(1-\alpha)}{1-\alpha}} \\ r^* &= \alpha \cdot \left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{-1} \\ r^* &= \alpha \cdot \left(\frac{\delta + g + n}{n} \right)\end{aligned} \quad (10)$$

1.4

Vi dividerer hele udtrykket fra 1.1 med $\tilde{k}$ og får:

$$\frac{k'}{k} = \tilde{k}^{\alpha-1} - (\delta + g + n) \quad (11)$$

Vækstraten i $\tilde{y}$ er:

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \tilde{k}^\alpha \\ \frac{\delta}{\delta t} \tilde{y} &= \alpha \cdot \tilde{k}^{\alpha-1} \cdot \tilde{k}' \\ \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} &= \frac{\alpha \cdot \tilde{k}^{\alpha-1} \cdot \tilde{k}'}{\tilde{k}^\alpha} \\ &= \alpha \cdot \frac{\tilde{k}'}{\tilde{k}}\end{aligned}$$

Men fordi vi er interesseret i væksten i y skal vi gange med vækstraten i A , den er g . Da har vi:

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{\tilde{k}'}{\tilde{k}} \cdot g \quad (12)$$

Vi illustrerer ligning 11 i nedenstående modificerede Solow diagram: Det første led (den røde linje)

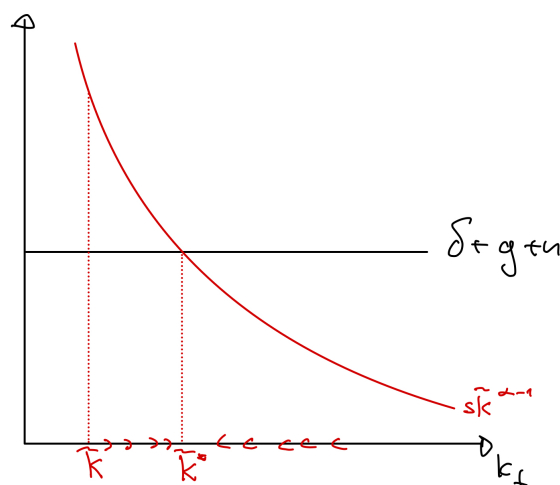


Figure 2: Principskitse af det modificerede Solowdiagram

viser, hvordan opsparingen per capita vokser, mens det andet led (den sorte linje) viser væksten på nedslidning, udtynding og teknologivækst. I et punkt til venstre for steady state, vil væksten i kapital per arbejder overstige det negative led, hvorfor k_t vil stige mod højre indtil steady state er nået. I et punkt til højre for steady state vil det negative led dominere, hvorfor vi vil bevæge os tilbage mod steady state. Kun i det punkt, hvor de to vækstrater er ens, og den samlede vækst dermed er 0, kan vi få en stabil steady state. Lønningerne er stigende, i k_t , mens reallejesatsen er faldende. Væksten i y er højest, når væksten i k_t er højest, idet de er direkte proportionale jf. ligning 12 (hvis der ikke er teknologisk regres, da g her vil være negativ).

Opgave 2

2.1

I steady state må der gælde, at $z \equiv \frac{K_t}{Y_t}$ skal være konstant, idet modellen ellers ikke kan udvise balanceret vækst. Det kan vi se ved at betragte:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\frac{K_t}{LA}}{\frac{Y_t}{LA}} \\ &= \frac{\tilde{k}}{\tilde{Y}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^\alpha} = \tilde{k}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

I steady state bliver z da:

$$\begin{aligned} z^* &= \left(\left(\frac{s}{\delta + g + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \\ z^* &= \frac{s}{\delta + g + n} \end{aligned} \tag{13}$$

2.2

Vi er nu tilbage i kontinuert tid, hvor:

$$\begin{aligned} Y_t &= K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ K_{t+1} &= S_t + (1 - \delta)K_t, & 0 < \delta < 1, \quad K_0 \text{ givet}, \\ S_t &= sY_t, & 0 < s < 1, \\ L_{t+1} &= (1 + n)L_t, & L_0 \text{ givet}, \\ A_{t+1} &= (1 + g)A_t, & A_0 \text{ givet}. \end{aligned}$$

Vi kan nu udtrykke z som:

$$\begin{aligned} y_t &= A_t^{1-\alpha} k_t^\alpha \\ \frac{1}{y_t} &= \frac{1}{A_t^{1-\alpha} k_t^\alpha} \\ z_t &= \frac{k_t}{A_t^{1-\alpha} k_t^\alpha} \\ &= \left(\frac{k_t}{A_t} \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

I periode $t + 1$ bliver det til:

$$z_{t+1} = \left(\frac{k_{t+1}}{A_{t+1}} \right)^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(k_{t+1} \cdot \frac{1}{A_{t+1}} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \cdot \frac{1}{A_{t+1}} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{S_t + (1-\delta)K_t}{(1+n)L_t} \cdot \frac{1}{A_{t+1}} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{sK_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t}{(1+n)L_t} \cdot \frac{1}{(1+g)A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{sK_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t}{(1+n)(1+g)L_t} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{sK_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t}{(1+n)(1+g)L_t} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{s(K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}) + (1-\delta)k_t}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \cdot (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Vi kan herfra omskrive transitionsligningen til:

$$\begin{aligned}
z_{t+1} &= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (sy_t + (1-\delta)k_t)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(k_t \left(s \frac{y_t}{k_t} + (1-\delta) \right) \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} k_t^{1-\alpha} \left(s \frac{y_t}{k_t} + (1-\delta) \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(k_t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{A_t} \right)^{1-\alpha} \right) \left(s \frac{y_t}{k_t} + (1-\delta) \right)^{1-\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(\left(\frac{k_t}{A_t} \right)^{1-\alpha} \right) \left(s \frac{y_t}{k_t} + (1-\delta) \right)^{1-\alpha} \\
z_{t+1} &= z_t \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(s \left(\frac{1}{z_t} \right) + (1-\delta) \right)^{1-\alpha} \\
&= z_t \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{s}{z_t} + (1-\delta) \right)^{1-\alpha} \\
&= z_t \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{s + (1-\delta)z_t}{z_t} \right)^{1-\alpha} \\
&= z_t \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{z_t} \right)^{1-\alpha} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} \\
&= z_t^{1-(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$= z_t^\alpha \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha}$$

2.3

Steady state værdien for z_t er:

$$\begin{aligned} z^* &= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} z_*^\alpha (s + (1-\delta)z_*)^{1-\alpha} \\ z_*^{1-\alpha} &= \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (s + (1-\delta)z_*)^{1-\alpha} \\ z_* &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s + (1-\delta)z_*) \\ z_* \cdot ((1+n)(1+g)) &= (s + (1-\delta)z_*) \\ z_* \cdot ((1+n)(1+g)) - (1-\delta)z_* &= s \\ z_* &= \frac{s}{(1+n)(1+g) - (1-\delta)} \end{aligned}$$

For at skitsere transitionsligningen i Solowdiagramet skal vi tjekke INADA betingelserne, da:

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 \\ z' &= \alpha \cdot z_t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (s + (1-\delta)z_t)^{1-\alpha} \\ \dots + z_t^\alpha \left(\frac{1}{(1+n)(1+g)} \right)^{1-\alpha} (1-\alpha) (s + (1-\delta)z_t)^{-\alpha} \cdot (s + (1-\delta)) &> 0 \\ \lim_{z' \rightarrow 0} &= \infty > 1 \\ \lim_{z' \rightarrow \infty} &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Vi ved altså, at transitionsligningen skærer 45-graderslinjen oppefra i den første kvadrant et unikt sted. Det er skitseret nedenfor:

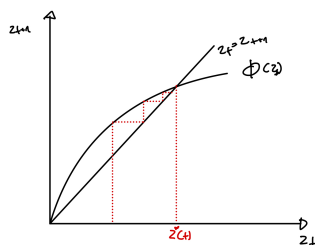


Figure 3: Principskitse af transitionsligningen

Vi ved, at der gælder, at:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{k_t^{1-\alpha}}{A_t} \\
 \ln(z) &= (1-\alpha)(\ln(k_t) - \ln(A_t)) \\
 (1-\alpha) \cdot \left[\frac{k'_t}{k} - \frac{A'_t}{A_t} \right] \\
 \frac{k'_t}{k} &= \frac{A'_t}{A_t} \\
 \frac{k'_t}{k} &\approx g
 \end{aligned}$$

Nu skal vi blot vise, at indkomsten per arbejder skal vokse med samme hastighed. Da:

$$\begin{aligned}
 y &= k_t^\alpha A_t^{1-\alpha} \\
 \ln(y) &= \alpha \ln(k_t) + (1-\alpha) \ln(A_t) \\
 \frac{y'}{y} &= \alpha \frac{k'_t}{k_t} + (1-\alpha) \frac{A'_t}{A_t} &= \alpha g + (1-\alpha) \cdot g = g
 \end{aligned}$$

Hermed er det ønskede vist.

Opgave 3

Vi skal finde et h , hvorom det gælder, at:

$$\begin{aligned}
 \ln(\tilde{y}^*) - \ln(\tilde{y}_h) &= \frac{1}{2}(\ln(\tilde{y}^*) - \ln(\tilde{y}_0)) \\
 \ln y^* - ([1 - (1-\lambda)^h] \ln y^* + (1-\lambda)^h \ln y_0) &= \frac{1}{2}(\ln y^* - \ln y_0) \\
 \ln(y^*)(1-\lambda)^h - \ln(y_0)(1-\lambda)^h &= \frac{1}{2}(\ln y^* - \ln y_0) \\
 (\ln(y^*) - \ln(y_0)) \cdot (1-\lambda)^h &= \frac{1}{2}(\ln y^* - \ln y_0) \\
 (1-\lambda)^h &= \frac{1}{2} \\
 h \ln(1-\lambda) &= -\ln(2) \\
 h &= \frac{-\ln(2)}{\ln(1-\lambda)}
 \end{aligned}$$

Vi kan approksimere λ til:

$$\lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta) \quad (14)$$

Hvis vi antager plausible parameterverdier, dvs. $\alpha = 0.33$, $n = 0.025$, $g = 0.05$, $\delta = 0.05$, får vi, $\lambda = \frac{2}{3} \cdot 0.125 = 0.083$. Halveringstiden bliver da:

$$h = \frac{-\ln(2)}{\ln(1 - 0.083)} \approx 8 \quad (15)$$

Med de direkte målinger fra bogen får vi:

$$h = \frac{-\ln(2)}{\ln(1 - 0.007)} \approx 98,6 \quad (16)$$

Opgave 5

Modellens transitionsligning er:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left(s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t \right). \quad (17)$$

Med tilhørende Solowligning:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t \right] \quad (18)$$

Hvor den modificeret Solowligning er:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta+ng) \right] \quad (19)$$

Vi skal nu finde effekten af et nyt, og højere, niveau af g . Vi ser, at væksten i $\tilde{k}$ vil være lavere ved et givet niveau af de øvrige parametre, hvorfor væksten vil falde fra g til g' ($g - g'$). Det er illustreret nedenfor:

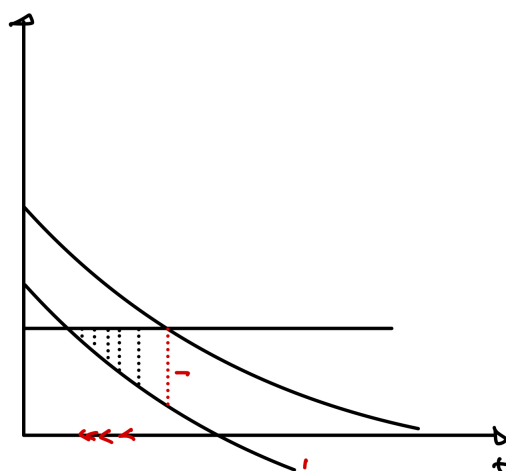


Figure 4: Visualisering i det modificerede Solowdiagram

Udviklingen i g_t^k er vist nedenfor:

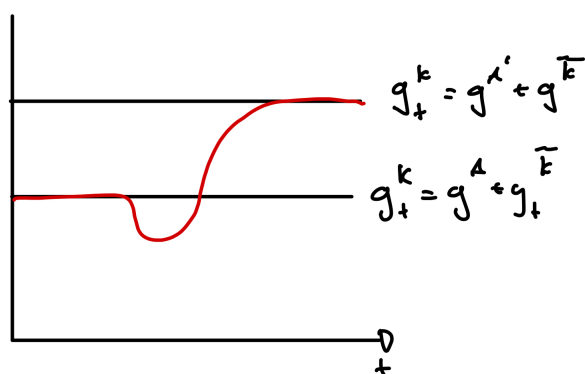


Figure 5: Visualisering af ændring i g_t^k

Afsluttende betragter vi ændringen i g_t^y . Vi får oplyst, at det kan skrives som:

$$g_t^y = \alpha g_t^k + (1 - \alpha) g_t^A \quad (20)$$

Idet $g_t = g_t^{\tilde{k}} + g_t^A$ kan vi indsætte og få:

$$g_t^y = \alpha(g_t^{\tilde{k}} + g_t^A) + (1 - \alpha) g_t^A \quad (21)$$

I Steady state, får vi da $g_t^y = g_t^A = g$, idet væksten i tilde variablene er 0. Lige efter støddet har vi, at:

$$g_t^y = \alpha(g - g' + g' + g') + (1 - \alpha)g' = \alpha g + (1 - \alpha)g' \quad (22)$$

Efter tilpasningsperioden ender vi igen med $g_t^{\tilde{k}} = 0$, hvorfor vi her ender i g' . Det er illustreret nedenfor:

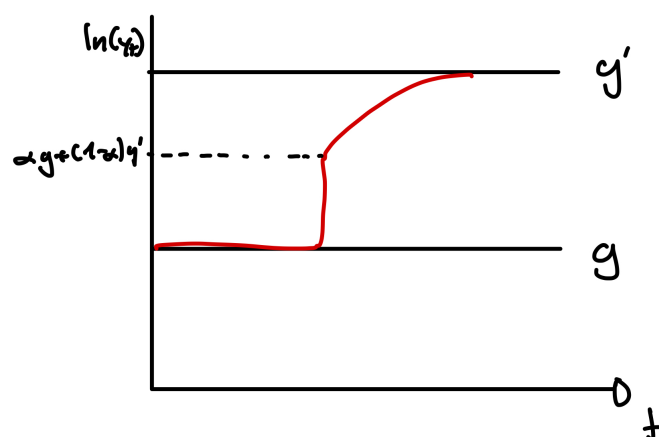


Figure 6: Visualisering af ændring i y_t^k

Opgave 7

Resultatet er anført nedenfor:

	USA 1966 - 1978	USA 1978 - 1990
Samlet årlig vækst	0,98%	0,96%
Vækst i kapital per arbejder	0,96%	0,74%
TFP vækst	0,02%	0,22%
	Danmark 1966 - 1978	Danmark 1978 - 1990
Samlet årlig vækst	1,41%	1,26%
Vækst i kapital per arbejder	1,55%	0,58%
TFP vækst	-0,14%	0,68%

Figure 7: Dekomponering af vækst i y_t