

Makroøkonomi I: Ugeseddel 5

Levi van Boekel

Uge 43, 2024

Opgave 1

Opgaven oplyser følgende balancerede vækststi:

$$\ln y_t^* = \ln A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha} [\ln s_K - \ln(n+g+\delta)] \quad (1)$$

Elasticiteten mht. til begge variable er da:

$$\frac{\delta \ln(y_t^*)}{\delta \ln s_K} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$
$$\frac{\delta \ln(y_t^*)}{\delta \ln(n+g+\delta)} = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

Som er numerisk ens. Med gængse antagelser om $\alpha = \frac{1}{3}$, har vi da:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Som ønsket. Elasticiteterne er estimeret nedenfor ved OLS;

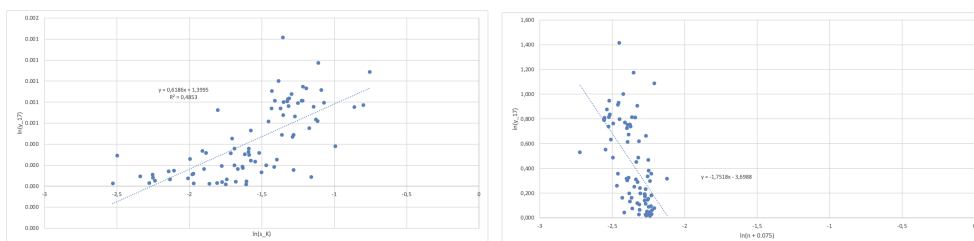


Figure 1: Empirisk estimation af elasticiteterne

Vi ser, at elasticiteten mht. $n+g+\delta$ er ca. 1.1 (numerisk) større end elasticiteten for s_K . Solow-modellen med humankapitalen har den balancerede vækststi givet ved:

$$\ln A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha-\phi} [\ln s_K - \ln(n+g+\delta+ng)] + \frac{\phi}{1-\alpha-\phi} [\ln s_H - \ln(n+g+\delta+ng)] \quad (3)$$

Hvorfor elasticiteterne er givet ved:

$$\frac{\delta \ln(y_t^*)}{\delta \ln s_K} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi}$$

$$\frac{\delta \ln(y_t^*)}{\delta \ln(n + g + \delta + ng)} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi}$$

Idet $\alpha + \phi < 1$, har vi $\phi < \frac{2}{3}$, hvilket passer med gængse antagelser om $\phi = \frac{1}{3}$. Derfor er $1 - \alpha - \phi = \frac{1}{3}$, hvormed elasticiteterne bliver 1. De er dermed større end i kapitel 5 modellen, idet der her både er en krydseffekt (øgede investeringer i kapital øger den samlede indkomst, der øger opsparingen i både humankapital og realkapital) og en selvforstærkende effekt (førnævnte gentages). Estimerne fra figur 1b passer bedre med Solowmodellen med humankapital, omend der stadigvæk er betydelige afvigelser.

Opgave 2

Hvis der tænkes en offentlig sektor ind i modellen fra kapitel 6 sådan, at den investerer en fast andel, s_h^g , i humankapital og bruger de øvrige indtægter på offentligt forbrug (som dermed bliver en del af BNP), er udviklingen i fysisk kapital givet ved:

$$K_{t+1} = (1 - \tau)s_k^p Y_t + (1 - \delta)K_t \quad (4)$$

Mens humankapital er givet ved:

$$H_{t+1} = [s_h^g + (1 - \tau)s_h^k] Y_t + (1 - \delta)H_t \quad (5)$$

Hvis parametrene i modellen også er $s_k = (1 - \tau)s_k^p$ og $s_h = s_h^g + (1 - \tau)s_h^k$, er modellen fuldstændig ækvivalent med den fra bogens kapitel.

Opgave 3

Vi ved, at reallejesatsen for kapital er givet ved dets marginalprodukt. Altså:

$$r_t = \frac{\delta Y}{\delta K} = \alpha \cdot K_t^{\alpha-1} H_t^\phi \cdot (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi}$$

Hvor $K_t = \tilde{k}_t A_t L_t$ og $H_t = \tilde{h}_t A_t L_t$. Derfor har vi:

$$r_t = \alpha(\tilde{k}_t A_t L_t)^{\alpha-1} (\tilde{h}_t A_t L_t)^\phi \cdot (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi} \quad (6)$$

Som bliver til:

$$r_t = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^\phi \quad (7)$$

Det er herfra klart, at reallejesatsen ikke udvikler sig idet tilde variablene indfinder sig i en steady. Ved indsættelse af steady state værdierne fås:

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha \cdot \left[\left[\frac{s_k^{1-\phi} s_h^\phi}{n+g+\delta+ng} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}} \right]^{\alpha-1} \left[\left[\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta+ng} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\phi}} \right]^\phi \\ &= \left[\frac{s_k^{1-\phi} s_h^\phi}{n+g+\delta+ng} \right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\phi}} \left[\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta+ng} \right]^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}} \end{aligned}$$

Vi fokuserer nu på eksponenterne:

$$\begin{aligned} E_{s_k} &= (1-\phi) \cdot \frac{(\alpha-1)}{1-\alpha-\phi} + \alpha \cdot \frac{\phi}{1-\alpha-\phi} \\ &= \frac{(1-\phi)(\alpha-1) + \alpha\phi}{1-\alpha-\phi} \\ &= \frac{\alpha-1-\alpha\phi+\phi+\alpha\phi}{1-\alpha-\phi} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Og herefter for den anden:

$$\begin{aligned} E_{s_h} &= \frac{\phi(\alpha-1)}{1-\alpha-\phi} + \frac{(1-\alpha) \cdot \phi}{1-\alpha-\phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi lader nu tælleren være lig D . Altså:

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{\alpha-1}{1-\alpha-\phi} + \frac{\phi}{1-\alpha-\phi} \\ E_D &= -1 \end{aligned}$$

Altså:

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{s_k^{-1}}{(n+g+\delta+ng)^{-1}} \\ r_t &= \frac{n+g+\delta+ng}{s_k} \end{aligned}$$

Realrenten afhænger altså ikke af opsparingen i humankapital. Det kan skyldes, at en højere investering i humankapital på den ene side øger kapitalens effektivitet, mens det på den anden side også fører til, at der bliver opsparet mere og udbuddet af kapital dermed stiger.

Opgave 4

For den optimale opsparingsrate i kapital skal der gælde, at den førsteordensafledte af forbrug per arbejder skal være 0. Vi har, at:

$$c_t = (1 - s_k - s_h)y_t^*$$

$$c_t = (1 - s_k - s_h)A_t \cdot \left[\frac{s_k}{n + g + \delta + ng} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}} \cdot \left[\frac{s_h}{n + g + \delta + ng} \right]^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

Vi bruger nu samme strategi som i 3:

$$c_t = (1 - s_k - s_h)s_k^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}}s_h^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}} \cdot \frac{A_t}{D^{\frac{\alpha+\phi}{1-\alpha-\phi}}}$$

Idet det sidste led er en konstant, skal vi ikke tage højde for det i vores optimeringsproblem. Da:

$$c_t = (1 - s_k - s_h)s_k^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\phi}}s_h^{\frac{\phi}{1-\alpha-\phi}}$$

$$c_t = (1 - s_k - s_h)s_k^a s_h^b$$

$$\ln(c_t) = \ln(1 - s_k - s_h) + a \ln(s_k) + b \ln(s_h)$$

Hvor FOC er:

$$\frac{\delta \ln(c_t)}{\delta \ln(s_k)} = \frac{-1}{1 - s_k - s_h} + \frac{a}{s_k} = 0$$

$$\frac{\delta \ln(c_t)}{\delta \ln(s_h)} = \frac{-1}{1 - s_k - s_h} + \frac{b}{s_h} = 0$$

Altså:

$$\frac{a}{s_k} = \frac{1}{1 - s_k - s_h}$$

$$s_k = (1 - s_k - s_h) \cdot a$$

$$\frac{b}{s_h} = \frac{-1}{1 - s_k - s_h}$$

$$s_h = (1 - s_k - s_h) \cdot b$$

Vi lader nu $s \equiv 1 - s_k - s_h$, da:

$$s = 1 - s \cdot a - s \cdot b$$

$$s + s \cdot a + s \cdot b = 1$$

$$s(1 + a + b) = 1$$

$$s = \frac{1}{1 + a + b}$$

Vi kan nu sætte tilbage og få:

$$s_k = s \cdot a$$

$$= \frac{1}{1 + a + b} \cdot a$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\alpha + \phi}{1 - \alpha - \phi}} \times \frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1 - \alpha - \phi}} \times \frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= (1 - \alpha - \phi) \times \frac{\alpha}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= \alpha$$

Som er *golden rule for kapital*. Tilsvarende har vi for s_h :

$$s_k = s \cdot b$$

$$= \frac{1}{1 + a + b} \cdot b$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\alpha + \phi}{1 - \alpha - \phi}} \times \frac{\phi}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1 - \alpha - \phi}} \times \frac{\phi}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= (1 - \alpha - \phi) \times \frac{\phi}{1 - \alpha - \phi}$$

$$= \phi$$

Som er *golden rule for humankapital*.