

Sandsynlighedsteori og Statistik: Ugeseddel 5

Levi van Boekel

Uge 40, 2024

Opgave 1

Vi lader X være en kontinuert stokastisk variabel på $(1, \infty)$ med tæthedsfunktion:

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)} \quad (1)$$

hvor $\alpha > 0$. Den tilhørende fordelingsfunktion findes ved integration. Da:

$$\begin{aligned} F(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \mathbf{1}(x \in (1, \infty)) \alpha x^{-(\alpha+1)} \\ &= \int_1^x \alpha x^{-\alpha-1} \\ &= \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} \right]_1^x \\ &= \alpha \cdot \left[-\frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= 1 - x^{-\alpha} \end{aligned}$$

Opgave 2

Vi starter med at finde tæthedsfunktionen for F ved at differentiere. Altså:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{hvis } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{hvis } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{hvis } x > 2 \end{cases}$$

2.1

Sandsynligheden for $P(\frac{1}{2} < X < 1)$ bestemmes nedenfor:

$$\begin{aligned} P(\tfrac{1}{2} < X < 1) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{3} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2.2

Sandsynligheden for $P(1 < X < \frac{3}{2})$ bestemmes nedenfor:

$$\begin{aligned} P(\tfrac{1}{2} < X < 1) &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.3

Sandsynligheden for $P(\frac{2}{3} < X < \frac{4}{3})$ bestemmes nedenfor:

$$\begin{aligned} P(\tfrac{2}{3} < X < \tfrac{4}{3}) &= \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{2}{3} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right] + \left[\frac{8}{9} - \frac{2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Opgave 3

Vi starter med at bestemme den forventede værdi af den stokastiske variabel, da:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \beta x^{\beta-1} \cdot \mathbf{1}(x \in (0, 1))$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \int_0^1 x \cdot x^{\beta-1} \\
&= \beta \int_0^1 x^{\beta} \\
&= \beta \left[\frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1} \right]_0^1 \\
&= \frac{\beta}{\beta+1}
\end{aligned}$$

Herefter bestemmer vi den transformerede:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \beta x^{\beta-1} \cdot \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \\
&= \beta \int_0^1 x^2 \cdot x^{\beta-1} \\
&= \beta \int_0^1 x^{\beta+1} \\
&= \beta \left[\frac{1}{\beta+2} x^{\beta+2} \right]_0^1 \\
&= \frac{\beta}{\beta+2}
\end{aligned}$$

Variansen bliver da:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 &= \frac{\beta}{\beta+2} - \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^2 \\
&= \frac{\beta}{\beta+2} - \frac{\beta^2}{(\beta+1)^2} \\
&= \frac{\beta \cdot (\beta+1)^2 - \beta^2 \cdot (\beta+2)}{(\beta+2)(\beta+1)^2} \\
&= \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \beta - \beta^3 - 2\beta^2}{(\beta+2)(\beta+1)^2} \\
&= \frac{\beta}{(\beta+2)(\beta+1)^2}
\end{aligned}$$

Opgave 4

4.1

En uniform fordeling på et givet interval, $I = [a, b]$, er en fordeling, hvor sandsynligheden for hver lige stor mængde er den samme (løst sagt). Tæthedsfunktionen på I bliver da:

$$f(x) = \mathbf{1}(x \in I) \frac{1}{b-a} \quad (2)$$

I vores tilfælde er det altså:

$$p_X(x) = \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \quad (3)$$

$$p_X(Y) = \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \quad (4)$$

4.2

Den forventede værdi er:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(6X + 32Y) &= \mathbb{E}(6X) + \mathbb{E}(32Y) \\ &= 6\mathbb{E}(X) + 32\mathbb{E}(X) \\ &= 6 \cdot \left[\int_0^1 x dx \right] + 32 \cdot \left[\int_0^1 x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 32 = 19 \end{aligned}$$

4.3

Den forventede værdi er:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^3) &= \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Og:

$$\mathbb{E}(X^3 + Y^3) = \mathbb{E}(X^3) \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

4.4

Vi finder først $\mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Og herefter finder vi $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Variansen bliver da:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

4.5

Hvis X har sandsynlighedstæthed p vil $Y = a + bX$, hvor $b \neq 0$, have tætheden

$$q(y) = \frac{1}{|b|} p\left(\frac{y-a}{b}\right) \quad (5)$$

Tætheden for $Z = -\frac{1}{2} + X$ findes da blot ved denne formel. Altså:

$$\begin{aligned}q(z) &= 1 \cdot p\left(\frac{z - (-\frac{1}{2})}{1}\right) \\ q(z) &= p\left(z + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Idet vi ved, at X er uniformt fordelt på $(0, 1)$, skal der gælde, at:

$$\begin{aligned}0 \leq z + \frac{1}{2} &\longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq z \\ 1 \geq z + \frac{1}{2} &\longleftrightarrow \frac{1}{2} \geq z\end{aligned}$$

Hvorfor den endelige fordeling er:

$$q(z) = \mathbf{1}(z \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \quad (6)$$

4.6

Den forventede værdi er:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Fordelingen er givet ved:

$$\begin{aligned}F(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^z \mathbf{1}(z \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^z 1 dx \\ &= [x]_{-\frac{1}{2}}^z \\ &= z + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Opgave 5

5.1

Fordelingsfunktionen udledes nedenfor:

$$\begin{aligned}F(Z \leq z) &= \lambda \int_0^z e^{-\lambda z} \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z} \right]_0^z \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z} + \frac{1}{\lambda} \right] \\ &= e^{-\lambda z} + 1\end{aligned}$$

For at vise, at $Z = F(X)$ er ligefordelt på $(0, 1)$, betragter vi:

$$P(Z \leq z) = P(F(X) \leq z) = P(X \leq F(z)^{-1}) = F(F(z)^{-1}) = z \quad (7)$$

Bemærk, at grænsen gælder, idet $P(Z \leq z)$ er mellem 0 og 1. Årsagen til, at den er ligefordelt er da, at ssh. for at den stokastiske variabel er mindre eller lig z blot er lig z , hvilket er definitionen

på en ligefordelt fordeling.

5.2

Vi lader X være standard normalfordelt med $P(X \leq x) = \Phi(X)$. Vi vil nu vise, at $Y = \Phi(X)$ er ligefordelt på $(0, 1)$. Da:

$$P(Y \leq y) = P(\Phi(X) \leq y) = P(X \leq F(y)^{-1}) = F(F(y)^{-1}) = y$$

Hermed vist.

Opgave 6

Vi antager, at den stokastiske variable X er eksponentialfordelt med parameter λ .

6.1

Vi finder $P(X > x)$ for alle $x > 0$ ved blot at trække 1 fra resultatet fra 5.1, idet vi her bestemmer ssh. for at $Z \leq z$. Da:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} \quad (8)$$

6.2

For $\lambda = 1$ finder vi nu ssh. for at $1 < X < 2$ ved:

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= \int_1^2 e^{-x} \\ &= [-e^{-x}]_1^2 \\ &= -e^{-2} + e^{-1} \approx 0.23 \end{aligned}$$

Opgave 7

7.1

Vi kender ikke $p(x)$, men endepunkterne er a og b . Den inverse af y er:

$$(e^y)^{-1} = \ln(y) \quad (9)$$

Den afledte heraf er:

$$\ln(y)' = \frac{1}{y} \quad (10)$$

Vi har da:

$$q(y) = \begin{cases} p(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y} & \text{hvis } y \in (e^a, e^b) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (11)$$

7.2

Vi kender ikke $p(x)$, men endepunkterne er a og b . Den inverse af y er:

$$(\sqrt{y})^{-1} = y^2 \quad (12)$$

Den afledte heraf er:

$$(y^2)' = 2y \quad (13)$$

Vi har da:

$$q(y) = \begin{cases} p(y^2) \cdot 2y & \text{hvis } y \in (\sqrt{a}, \sqrt{b}) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (14)$$

7.3

Vi kender ikke $p(x)$, men endepunkterne er a og b . Den inverse af y er:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{y} \quad (15)$$

Den afledte heraf er:

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2} \quad (16)$$

Vi har da:

$$q(y) = \begin{cases} p\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} & \text{hvis } y \in \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (17)$$

7.4

Vi kender ikke $p(x)$, men endepunkterne er a og b . Den inverse af y er:

$$(y^2)^{-1} = \sqrt{y} \quad (18)$$

Den afledte heraf er:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (19)$$

Vi har da:

$$q(y) = \begin{cases} p(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{hvis } y \in (a^2, b^2) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (20)$$

Opgave 8

8.1

Vi ved, at $p(x)$ er givet ved:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (21)$$

Hvor endepunkterne, er 0 og ∞ . Den inverse af y er:

$$(e^y)^{-1} = \ln(y) \quad (22)$$

Hvor den afledte er:

$$\ln(y)' = \frac{1}{y} \quad (23)$$

Vi har da:

$$p(\ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Hvorfor sandsynlighedstætheden bliver:

$$q(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{hvis } y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (24)$$

8.2

Det er ikke svært at se, at det samme gælder for enhed værdi βe^y , for $\beta > 0$, idet vi her blot får:

$$(\beta e^y)^{-1} = \frac{1}{\beta} \ln(y) \quad (25)$$

Hvor den afledte er:

$$\left(\frac{1}{\beta} \ln(y)\right)' = \frac{1}{\beta y} \quad (26)$$

Ved indsættelse fås altså:

$$q(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta y \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\beta^{-1} \ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{hvis } y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (27)$$

Opgave 9

9.1

Vi lader $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ og definerer nu den nye stokastiske variabel $Z = X - \mu$. Fordi den forventede værdi er en lineær operator, har vi:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X - \mu) = \mathbb{E} - \mu = \mu - \mu = 0 \quad (28)$$

Variansen af Z er stadigvæk σ^2 , fordi variansen ikke afhænger af en konstant. Vi definerer nu:

$$Y = \frac{Z}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} Z \quad (29)$$

Middelværdien er 0, idet:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sigma} 0 = 0 \quad (30)$$

Vi husker nu, at $\text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$, hvorfor variansen for Y er:

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1 \quad (31)$$

Fordelingen af Y er da: $Y \sim N(0, 1)$

9.2

Vi ser, at $Z = Y^2$, dvs. en fordelingen er $Y^2 \sim N^2(0, 1) = Y^2 \sim \chi_1^2$. Vi ved, at den nedre grænse er 0 og den øvre grænse er 1. Samtidig ved vi, at:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (32)$$

Samtidig har vi:

$$(Y^2)^{-1} = \sqrt{y} \quad (33)$$

og:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (34)$$

Altså har vi:

$$q(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) & \text{hvis } x \in (0, \infty) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (35)$$

Som altså er tætheden.