

Sandsynlighedsteori og Statistik: Ugeseddel 6

Levi van Boekel

Uge 41, 2024

Opgave 1

Lad (X, Y) være en to-dimensional stokastisk ligefordelt vektor på $A = (0, 1) \times (0, 1)$ med tæthedsfunktionen:

$$p(x, y) = \mathbf{1}(x \in (0, 1))\mathbf{1}(y \in (0, 1)) \quad (1)$$

1.1

For at bestemme $P(X < 0.1, Y < 0.6)$ opstiller vi følgende integral:

$$\begin{aligned} P(X < 0.1, Y < 0.6) &= \int_0^{0.1} \int_0^{0.6} 1 dy dx \\ &= \int_0^{0.1} 0.6 dx = 0.06 \end{aligned}$$

Man kan grafisk vise sandsynligheden af en ligefordeling på A som arealet af den firkant, som udspændes af grænserne. I opgavens tilfælde er det altså arealet af den firkant, der udspændes af 0.1 på førsteaksen og 0.6 på andenaksen. Da er $0.6 \times 0.1 = 0.06$, som jo netop er ssh.

1.2

Vi bestemmer ssh. som følgende integral:

$$\begin{aligned} P(0.25 \leq X \leq 0.75, 0.4 \leq Y \leq 0.6) &= \int_{0.25}^{0.75} \int_{0.4}^{0.6} 1 dy dx \\ &= \int_{0.25}^{0.75} 0.2 dx \\ &= 0.2 \cdot 0.75 - 0.2 \cdot 0.25 = 0.1 \end{aligned}$$

1.3

Vi løser problemet ved:

$$\begin{aligned} P(X < 0.1) &= \int_0^{0.1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \mathbf{1}(y \in (0, 1)) dy dx \\ &= \int_0^{0.1} \int_0^1 dy dx \\ &= \int_0^{0.1} 1 dx = 0.1 \end{aligned}$$

1.4

Den marginale fordeling af X findes ved:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \mathbf{1}(y \in (0, 1)) dy \\ g(x) &= \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \int_0^1 1 dy \\ g(x) &= \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \end{aligned}$$

Fordelingsfunktionen er:

$$\begin{aligned} F(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \mathbf{1}(x \in (0, 1)) dx \\ &= \int_0^x 1 dx \\ &= x \end{aligned}$$

Da har vi:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0 \\ x & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{hvis } x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

1.5

For at vise, at X og Y er uafhængige, skal vi finde den marginale tæthed af Y og herefter tjekke om produktet af de marginale er lig den simultane. Da:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \mathbf{1}(y \in (0, 1)) dx \\ &= \mathbf{1}(y \in (0, 1)) \int_0^1 1 dx \\ &= \mathbf{1}(y \in (0, 1)) \end{aligned}$$

Da har vi:

$$\mathbf{1}(x \in (0, 1)) \cdot \mathbf{1}(y \in (0, 1)) = p(x, y) \quad (3)$$

Hvorfor de to er uafhængige. De udspænder ligeledes en produktmængde.

Opgave 2

2.1

Vi ønsker at finde middelværdien af $2Y$, hvor Y er en ligefordelt stokastisk variabel på $[0, 1]$. Vi har da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2Y) &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \mathbf{1}(y \in (0, 1)) \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

For at bestemme variansen har vi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \mathbf{1}(y \in (0, 1)) \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hvorfor variansen er:

$$\text{Var}(2Y) = 4 \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = 0.33 \quad (4)$$

Hvor vi husker tilbage til, at $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$.

2.2

Tætheden for $2Y$ er:

$$q(y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}\left(\frac{y}{2} \in (0, 1)\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \mathbf{1}(y \in (0, 2)) \quad (5)$$

2.3

Kovariansen mellem Y og $2Y$ er:

$$\text{Cov}(Y, 2Y) = 2\text{Var}(Y) \quad (6)$$

Opgave 3

Vi betragter en todimensional stokastisk vektor på $[5, 10] \times [3, 7]$, med tæthedsfunktion:

$$p(x, y) = \frac{1}{20} \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \mathbf{1}(y \in (3, 7)) \quad (7)$$

3.1

Vi kan se, at p er en tæthedsfunktion ved indse, at nedenstående integral evaluerer til 1, da:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{20} \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \mathbf{1}(y \in (3, 7)) dy dx \\ & \int_5^{10} \int_3^7 \frac{1}{20} dy dx \\ & \int_5^{10} \left[\frac{7}{20} - \frac{3}{20} \right] dx \\ & \int_5^{10} \frac{4}{20} dx \\ & \frac{40}{20} - \frac{20}{20} = 1 \end{aligned}$$

3.2

Vi udregner nu $P(6 \leq X \leq 10, 4 \leq Y \leq 6)$. Da:

$$\begin{aligned} & \int_6^{10} \int_4^6 \frac{1}{20} dy dx \\ & \int_6^{10} \frac{2}{20} dx \\ & \frac{20}{20} - \frac{12}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

3.3

Den marginale tæthed af X findes ved:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{20} \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \mathbf{1}(y \in (3, 7)) dy \\ &= \int_3^7 \frac{1}{20} \mathbf{1}(x \in (5, 10)) dy \\ &= \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Som har fordelingen:

$$F(X \leq x) = \int_5^x \frac{1}{5} dx \quad (8)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot x - 1 \quad (9)$$

Da har vi:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 5 \\ \frac{1}{5} \cdot x - 1 & \text{hvis } 5 < x < 10 \\ 1 & \text{hvis } x > 10 \end{cases} \quad (10)$$

Den marginale tæthed af Y findes ved:

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{20} \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \mathbf{1}(y \in (3, 7)) dx \\ &= \int_5^{10} \frac{1}{20} \mathbf{1}(y \in (3, 7)) dx \\ &= \mathbf{1}(y \in (3, 7)) \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Som har fordelingen:

$$F(Y \leq y) = \int_3^y \frac{1}{4} dx \quad (11)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot x - \frac{3}{4} \quad (12)$$

Da har vi:

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } y < 3 \\ \frac{1}{4} \cdot x - \frac{3}{4} & \text{hvis } 3 < y < 7 \\ 1 & \text{hvis } y > 7 \end{cases} \quad (13)$$

3.4

Middelværdien af X er:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbf{1}(x \in (5, 10)) \frac{1}{5} dx \\ &= \int_5^{10} \frac{1}{5} x dx \\ &= \left[\frac{1}{10} x^2 \right]_5^{10} = \frac{1}{10} 100 - \frac{1}{10} 25 = 7.5\end{aligned}$$

Opgave 4

Vi har:

$$p(x, y) = 6e^{-2x-3y} \quad (14)$$

Hvor $X \in [0, \infty)$ og $Y \in [0, \infty)$.

4.1

Vi udregner:

$$\begin{aligned}P(X \leq 2, Y \leq 4) &= \int_0^2 \int_0^4 6e^{-2x-3y} dy dx \\ &= \int_0^2 \left[-2e^{-2x-3y} \right]_0^4 dx \\ &= \int_0^2 -2e^{-2x-12} + 2e^{-2x} dx \\ &= -2e^{-12} \int_0^2 e^{-2x} + \int_0^2 2e^{-2x} dx \\ &= -2e^{-12} \left[-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2} \right] + [-e^{-4} + 1] \\ &= -e^{-12} [1 - e^{-4}] + [1 - e^{-4}]\end{aligned}$$

Vi udregner:

$$\begin{aligned}P(X \leq 2, Y \leq 4) &= \int_1^{\infty} \int_0^3 6e^{-2x-3y} dy dx \\ &= \int_1^{\infty} \left[-2e^{-2x-3y} \right]_0^3 dx \\ &= \int_1^{\infty} -2e^{-2x-9} + 2e^{-2x} dx \\ &= \int_1^{\infty} -2e^{-2x-9} dx + \int_1^{\infty} 2e^{-2x} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2e^{-9} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_1^n + [-e^{-2x}]_1^n \\
&= -2e^{-9} \cdot \frac{1}{2}e^{-2} + e^{-2} \\
&= -e^{-9} \cdot e^{-2} + e^{-2} \\
&= -e^{-11} + e^{-2} \approx 0.135
\end{aligned}$$

4.2

Vi finder de marginale fordelinger:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^\infty 6e^{-2x-3y} \mathbf{1}(x \in [0, \infty)) dy \\
&= \mathbf{1}(x \in [0, \infty)) \int_0^\infty 6e^{-2x-3y} dy \\
&= \mathbf{1}(x \in [0, \infty)) [-2e^{-2x-3y}]_0^\infty \\
&= \mathbf{1}(x \in [0, \infty)) \times 2e^{-2x}
\end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned}
g(y) &= \int_0^\infty 6e^{-2x-3y} \mathbf{1}(y \in [0, \infty)) dx \\
&= \mathbf{1}(y \in [0, \infty)) \int_0^\infty 6e^{-2x-3y} dx \\
&= \mathbf{1}(y \in [0, \infty)) [-3e^{-2x-3y}]_0^\infty \\
&= \mathbf{1}(y \in [0, \infty)) \times 3e^{-3y}
\end{aligned}$$

4.3

Tæthedsfunktionen for X er givet ved:

$$\begin{aligned}
F(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \mathbf{1}(x \in [0, \infty)) \times 2e^{-2x} dx \\
&= \int_0^x 2e^{-2x} dx \\
&= [-e^{-2x}]_0^x \\
&= -e^{-2x} + 1
\end{aligned}$$

Hvis $x \in (0, \infty[$, hvis $x < 0$, er den 0. Medianen er den midterste værdi. Da:

$$\begin{aligned} -e^{-2x} + 1 &= \frac{1}{2} \\ e^{-2x} &= \frac{1}{2} \\ -2x &= -\ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

4.4

Vi har fundet de marginale i 4.2, og ser oplagt, at produktet af de to er den oprindelige fordeling.

Opgave 5

Vi antager, at at X, Y er ligefordelte på

$$A = \{(x, y) \mid x \in [1, 2], y \in [1, 2]\}$$

med tætheden

$$p(x, y) = 1_A(x, y)$$

5.1

Mængden A udspænder et rektangel, med x siderne 1, 2 og y siderne 1, 2.

5.2

Tætheden for X er:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_1^2 \mathbf{1}(x \in [1, 2]) 1 dy \\ p(x) &= \mathbf{1}(x \in [1, 2]) \int_1^2 1 dy \\ p(x) &= \mathbf{1}(x \in [1, 2]) \end{aligned}$$

Altså ligefordelt. Det samme gælder for Y , da:

$$\begin{aligned} p(y) &= \int_1^2 \mathbf{1}(y \in [1, 2]) 1 dx \\ p(y) &= \mathbf{1}(y \in [1, 2]) \int_1^2 1 dx \end{aligned}$$

$$p(y) = \mathbf{1}(y \in [1, 2])$$

5.3

Da $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, har vi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= 2 \cdot \int_1^2 x dx \\ \mathbb{E}(Z) &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} 1 \right] \\ \mathbb{E}(Z) &= 2 \frac{3}{2} = 3\end{aligned}$$

For at finde variansen finder vi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_1^2 x^2 dx \\ \mathbb{E}(X^2) &= \left[\frac{1}{3} 8 - \frac{1}{3} 1 \right] \\ \mathbb{E}(X^2) &= 2.33\end{aligned}$$

Da bliver variansen, fordi de ligefordelte stokastiske variable er oplagt uafhængige.

$$\text{Var}(Z) = 2 \cdot (2.33 - 2, 25) = 0.16 \quad (15)$$

5.4

Tætheden for $Z = X + Y$ findes ved indledningsvis at betragte:

$$p(x, z - x) = \mathbf{1}(1 \leq x \leq 2) \mathbf{1}(1 \leq z - x \leq 2)$$

Vi ved, at Z minimalt kan være 2 og maksimalt være 4. Hvis Z er mellem 2 og 3 må det gælde, at $1 \leq x \leq z - 1$. På samme måde, hvis Z er mellem 3 og 4, her må det gælde, at $z - 2 \leq x \leq 2$.
Altså:

$$p(x, z - x) = \mathbf{1}(2 \leq z \leq 3) \mathbf{1}(1 \leq x \leq z - 1) + \mathbf{1}(3 \leq z \leq 4) \mathbf{1}(z - 2 \leq x \leq 2)$$

Vi kan nu marginalisere z ved:

$$\begin{aligned}g(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(2 \leq z \leq 3) \mathbf{1}(1 \leq x \leq z - 1) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(3 \leq z \leq 4) \mathbf{1}(z - 2 \leq x \leq 2) \\ &= \mathbf{1}(2 \leq z \leq 3) \int_1^{z-1} 1 dx + \mathbf{1}(3 \leq z \leq 4) \int_{z-2}^2 1 dx\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}(2 \leq z \leq 3)(z - 2) + (4 - z)\mathbf{1}(3 \leq z \leq 4)$$

5.5

Vi bruger nu $q(z)$ til at udregne middelværdien:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z) &= \int_2^3 z^2 - 2z dz + \int_3^4 4z - z^2 dz \\ &= \left[\frac{1}{3}z^3 - z^2 \right]_2^3 + \left[2z^2 - \frac{1}{3}z^3 \right]_3^4 \\ &= [(9 - 9) - (2.66 - 4)] + [10.66 - 9] \\ &= 1.33 + 10.66 - 9 = 3\end{aligned}$$

Som er det samme vi fik da vi gangede middelværdierne, sammen. Det bekræfter netop resultatet, idet de to stokastiske variable er uafhængige.

5.5

Kovariansen er:

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y)$$

Da det første led er andet led er 0, idet de stokastiske variable er uafhængige, har vi kun det andet tilbage:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, X) &= \text{Var}(X) \\ &= \int_1^2 x^2 dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3} - \frac{9}{4} \\ &= 2.66 - 0.33 - 2.25 \approx 0.08\end{aligned}$$

Opgave 6

Vi lader X, Y være uafhængige eksponentialfordelte stokastiske variable med $p(x) = e^{-x}$ og $q(y) = e^{-y}$ på $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

6.1

Tætheden af X, Y er:

$$p(x, y) = e^{-x-y}\mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(y > 0)$$

Idet de to stokastiske variable er uafhængige, og summen af de marginale da er den simultane.

6.2

Tætheden for $Z = X + Y$ findes ved først at indsætte $z - x = y$ i 6.1, da:

$$\begin{aligned} p(x, z - x) &= e^{-x-(z-x)} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(z - x > 0) \\ p(x, z - x) &= e^{-z} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(z > x) \end{aligned}$$

Da har vi:

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(z > x) dx \\ &= \int_0^z e^{-z} \times 1 dx \\ &= e^{-z} \cdot [x]_0^z \\ &= z \cdot e^{-z} \mathbf{1}(z > 0) \end{aligned}$$

6.3

Tætheden for $Z = X - Y$ findes ved at indsætte $y = -z + x$, da:

$$\begin{aligned} p(x, -z + x) &= e^{-x-(-z+x)} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(-z + x > 0) \\ p(x, -z + x) &= e^{z-2x} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(x > z) \end{aligned}$$

Da har vi:

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{z-2x} \mathbf{1}(x > 0) \mathbf{1}(x > z) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{z-2x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{z-2x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} e^{-z} \end{aligned}$$

Opgave 7

Vi lader X_1, X_2, X_3, X_4 være uafhængige identiske fordelte med middelværdi 5 og varians 9. Vi lader $Y = X_1 + 2X_2 - X_4$.

7.1

Da alle har identisk middelværdi, har vi:

$$\mathbb{E}(Z) = 2 \times \mathbb{E}(X) = 10 \quad (16)$$

7.2

Vi har:

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) + 2^2\text{Var}(X) + (-1)^2\text{Var}(X) = 6\text{Var}(X) = 54 \quad (17)$$

Opgave 8

Vi har:

$$p(x, y) = 24xy\mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(y > 0)\mathbf{1}(x + y < 1) \quad (18)$$

8.1

Den forventede værdi er:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 24xy \times x \times y \times \mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(y > 0)\mathbf{1}(x + y < 1) dy dx \\ &= 24 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy dx \\ &= 24 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} x^2 dx \\ &= 24 \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} (1-x)^3 dx \\ &= 8 \int_0^1 x^2 \cdot (1-x)^3 dx \\ &= 8 \cdot \left[-\frac{1}{6} x^6 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

8.2

Vi skal først finde de marginale fordelinger, for herefter at finde de marginale middelværdier og da bestemme kovariansen. Altså:

$$\begin{aligned} q(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 24xy\mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(y > 0)\mathbf{1}(x + y < 1) dy \\ &= \mathbf{1}(x > 0) \int_0^{1-x} 24xy dy \\ &= \mathbf{1}(x > 0) [12xy^2]_0^{1-x} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(x + y < 1)12x \cdot (1 - x)^2$$

Og:

$$\begin{aligned} q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} 24xy\mathbf{1}(x > 0)\mathbf{1}(y > 0)\mathbf{1}(x + y < 1)dx \\ &= \mathbf{1}(y > 0) \int_0^{1-y} 24xydy \\ &= \mathbf{1}(y > 0) [12x^2y]_0^{1-y} \\ &= \mathbf{1}(y > 0)\mathbf{1}(x + y < 1)12y \cdot (1 - y)^2 \end{aligned}$$

Middelværdien er nu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x > 0)12x \cdot (1 - x)^2 x dx \\ &= \int_0^1 12x^2 \cdot (1 - x)^2 dx \\ &= \left[\frac{12}{5}x^5 - 6x^4 + 4x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Kovariansen er da:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} \approx -0.026$$

8.3

Vi skal nu finde de variansen af de marginale fordelinger. Idet vi allerede har middelværdierne, kan vi blot finde:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(x > 0)12x \cdot (1 - x)^2 x^3 dx \\ &= \int_0^1 12x^3 \cdot (1 - x)^2 dx \\ &= \left[2x^6 - \frac{24}{5}x^5 + 3x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Da er variansen:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = 0.04 \quad (19)$$

Og korrelationskoefficienten bliver da:

$$\text{Correl}(X, Y) = \frac{-0.026}{\sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}} = \frac{-0.026}{0.2} = -0.13 \quad (20)$$

8.4

Kovariansen er $15 \cdot \text{Cov}(XY) = 15 \cdot -0.026 = -0,39$.

8.5

Kovariansen er uændret.

8.6

Kovariansen er $5 \cdot \text{Cov}(XY) = 5 \cdot -0.026 = -0,13$.

8.7

Kovariansen er $3 \cdot \text{Var}(X) = 3 \cdot 0.04 = 0.12$

Opgave 9

9.1

Vi finder de marginale tætheder:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3xy^{-2} \mathbf{1}(x \in (0, 1) \mathbf{1}(y \in (1, 3))) dy \\ &= \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \int_1^3 3xy^{-2} dy \\ &= \mathbf{1}(x \in (0, 1)) \cdot [-3xy^{-1}]_1^3 \\ &= \mathbf{1}(x \in (0, 1)) 2x \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 3xy^{-2} \mathbf{1}(x \in (0, 1)) dx \\ &= \mathbf{1}(y \in (1, 3)) \int_0^1 3xy^{-2} dx \\ &= \mathbf{1}(y \in (1, 3)) \left[\frac{3}{2} x^2 y^{-2} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}y^{-2}\mathbf{1}(y \in (1, 3))$$

9.2

Vi ser, at produktet af de to er lig:

$$p(x, y) = \mathbf{1}(x \in (0, 1))2x \cdot \frac{3}{2}y^{-2}\mathbf{1}(y \in (1, 3)) = 3xy^{-2} \quad (21)$$

Hvorfor de er uafhængige.

Opgave 10

Vi lader X være ligefordelt i $(-1, 1)$ og definerer $Y = X^2$. Middelværdien af X er:

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 \quad (22)$$

Mens den forventede værdi af XY er:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad (23)$$

Derfor er kovariansen $\mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - 0 = 0$. De to er dog ikke ukorrelerede, idet Y åbenlyst afhænger af X .