

Mikroøkonomi I: Ugeseddel 10

Levi van Boekel

Uge 46, 2024

Opgave 1

Vi betragter en virksomhed med produktionsfunktionen $f(\ell, k)$, hvor begge input kan tiltage ikke negative mængder. Produktionsfunktionen opfylder, at $f(0, k) = 0$ for alle k . Virksomheden er pristager, og output kan sælges til $p > 0$.

1.1

På lang sigt er begge input fleksible, hvorfor profitmaksimeringsproblemet bliver:

$$\max_{\ell, k} p \cdot f(\ell, k) - w \cdot \ell - r \cdot k \quad (1)$$

1.2

På kort sigt forekommer det principielt rimeligt at antage, at kapitalapparatet er fast. Derfor foresimples profitmaksimeringsproblemet til:

$$\max_{\ell} p \cdot f(\ell, k) - w \cdot \ell - r \cdot k \quad (2)$$

1.3

På lang sigt er der fri entry og exit på markedet, hvorfor virksomhederne vil vælge at producere $y > 0$, hvis $\pi \geq 0$, idet virksomhederne kan vælge at forlade markedet med negativ profit.

På kort sigt skal der derimod blot være et positivt dækningsbidrag (dvs. hver solgt enhed skal være profitabel givet de variable omkostninger), altså $pf(\ell, k) - k > 0$.

1.4

Virksomhedens omkostningsminimeringsproblem er:

$$\min_{\ell, k} w \cdot \ell + r \cdot k \quad \text{u.b.b.} \quad f(\ell, k) = y \quad (3)$$

Opgave 2

Vi betragter tre produktionsfunktioner:

$$f(\ell, k) = A \cdot \ell^a \cdot k^b \quad (4)$$

$$f(\ell, k) = a\ell + bk \quad (5)$$

$$f(\ell, k) = \min\{\ell, k\} \quad (6)$$

2.1

(a) Vi indsætter:

$$f(t \cdot \ell, t \cdot k) = t^{a+b} \cdot y$$

Og ser umiddelbart, at produktionsfunktionen udviser stigende skalaafkast-, hvis $a + b > 1$, aftagende-, hvis $a + b < 1$ og konstant- hvis $a + b = 1$.

(b) Marginalproduktet for de to input er:

$$MPL = \frac{\delta y}{\delta \ell} = a \cdot A \cdot \ell^{a-1} \cdot k^b$$

$$MPK = \frac{\delta y}{\delta k} = b \cdot A \cdot \ell^a \cdot k^{b-1}$$

Vi ser umiddelbart, at der er aftagende marginalprodukt for arbejdskraft, hvis $a < 1$, mens det for kapital gælder, at $b < 1$.

(c) Profitmaksimeringsproblemet på lang sigt er:

$$\max_{\ell, k} p \cdot A \cdot \ell^a \cdot k^b - w\ell - rk \quad (7)$$

De to første ordens betingelser er:

$$p \cdot a \cdot A \cdot \ell^{a-1} \cdot k^b - w = 0$$

$$p \cdot b \cdot A \cdot \ell^a \cdot k^{b-1} - r = 0$$

Vi kan nu gange den første ligning med ℓ og den anden med k og få:

$$p \cdot a \cdot A \cdot \ell^a \cdot k^b - w\ell = 0$$

$$p \cdot b \cdot A \cdot \ell^b \cdot k^b - rk = 0$$

Som er ækvivalent med:

$$p \cdot ay = w\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{p \cdot a \cdot y}{w}$$

$$p \cdot by = rk \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{p \cdot b \cdot y}{r}$$

Den producerede mængde bliver da:

$$\begin{aligned} y &= A \cdot \left[\frac{p \cdot a \cdot y}{w} \right]^a \cdot \left[\frac{p \cdot b \cdot y}{r} \right]^b \\ &= A \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^a \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^b y^{a+b} \\ y^{1-a-b} &= A \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^a \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^b \\ y &= A^{\frac{1}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^{\frac{a}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^{\frac{b}{1-a-b}} \end{aligned}$$

Som giver anledning til følgende efterspørgsel efter arbejdskraft:

$$\begin{aligned} \ell^* &= A^{\frac{1}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^{\frac{a+1-a-b}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^{\frac{b}{1-a-b}} \\ &= A^{\frac{1}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^{\frac{1-b}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^{\frac{b}{1-a-b}} \\ &= \left(A \left(\frac{p^{1-b} \cdot a^{1-b}}{w^{1-b}} \right) \left(\frac{p^b \cdot b^b}{r^b} \right) \right)^{\frac{1}{1-a-b}} \\ &= \left(\frac{pAa^{1-b}b^b}{r^bw^{1-b}} \right)^{\frac{1}{1-a-b}} \end{aligned}$$

Og følgende efterspørgsel efter kapital:

$$\begin{aligned} k^* &= A^{\frac{1}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot a}{w} \right]^{\frac{a}{1-a-b}} \cdot \left[\frac{p \cdot b}{r} \right]^{\frac{1-a}{1-a-b}} \\ &= \left[A \cdot \left[\frac{p^a a^a}{w^a} \right] \cdot \left[\frac{p^{1-a} b^{1-a}}{r^{1-a}} \right] \right]^{\frac{1}{1-a-b}} \\ &= \left[\frac{A \cdot p a^a b^{1-a}}{w^a r^{1-a}} \right] \end{aligned}$$

(d) Den nødvendige mængde arbejdskraft, når output og kapitalapparat holdes fast er:

$$\ell^a = \frac{y}{A \cdot k^b}$$

$$\ell = \left[\frac{y}{A} \right]^{\frac{1}{a}} \cdot k^{-\frac{b}{a}}$$

Vi ser, at et højere teknologiniveau kræver mindre arbejdskraft, mens mere output kræver mere arbejdskraft og mere kapital, for givet output, kræver mindre arbejdskraft. Styrken af effekterne afhænger af parametrene, og vi ser, at der er modsatrettede effekter, hvor en stigning i a mindsker behovet for a i form af det første led, fordi arbejdskraften er mere produktiv, men samtidig også øger behovet gennem det andet led, fordi kapitalen er relativt mindre produktiv. Omvendt er det klart, at jo højere b , jo mindre bliver efterspørgslen efter arbejdskraft for givet kapital og output-niveau, fordi kapitalen er relativt mere produktiv.

2.2

(a) Vi indsætter igen:

$$f(t \cdot \ell, t \cdot k) = t \cdot (a\ell + bk) = t \cdot y$$

Og ser, at produktionsfunktionen er homogen af grad. Da betingelserne er, at $a > 0$ og $b > 0$ er der da altid konstant skalaafkast.

(b) Marginalprodukterne er hhv. $MPL = a$ og $MPK = b$. Det er klart, at MPL da aldrig kan være aftagende, da de jo netop er konstante og ikke afhænger af niveauet af arbejdskraft eller kapital.

(c) Profitmaksimeringsproblemet på lang sigt er:

$$\max_{\ell, k} p \cdot (a\ell + bk) - w\ell - rk \quad (8)$$

Givet $pa > w$ og $pb > r$ vil maksimum opnås ved at bruge så meget som muligt af begge input. Hvis $pa > w$ og $pb < r$ vil maksimum opnås ved uendelig meget ℓ og nul k (og vice versa). Hvis $w > pa$ og $r > pb$, vil profit maksimeres ved ingen produktion.

(d) Den nødvendige mængde arbejdskraft, når output og kapitalapparat holdes konstant er:

$$y = a \cdot \ell + b \cdot k$$

$$\ell = \frac{y - bk}{a}$$

Det afhænger igen positivt af output og negativt af kapitalapparatet, hvor en større værdi af b mindsker efterspørgslen efter arbejdskraft for givet kapitalniveauet og en højere værdi af a ligeledes mindsker det nødvendige niveau, idet arbejdskraften her er mere produktiv (der kræves mindre af den).

2.3

(a) Vi har:

$$f(t \cdot \ell, t \cdot k) = \min(t \cdot \ell, t \cdot k) = t \cdot y \quad (9)$$

Da er produktionsfunktionen homogen af grad 1 og udviser altid konstant skalaafkast.

(b) Marginalprodukterne er ikke defineret, men løst sagt har vi:

$$MPL = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \ell < k \\ 0 & \text{hvis } \ell \geq k \end{cases} \quad (10)$$

Og:

$$MPK = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \ell \leq k \\ 1 & \text{hvis } \ell < k \end{cases} \quad (11)$$

(c) Profitmaksimeringsproblemet på lang sigt bliver:

$$\max_{\ell, k} p \cdot \min\{\ell, k\} - w \cdot \ell - r \cdot k \quad (12)$$

Hvis vi har:

$$p \cdot Y > w \cdot \ell - r \cdot k$$

$$p \cdot k > w \cdot k - r \cdot k \quad \text{antaget, at producenterne vil altid ligge sig i et punkt, hvor } \ell = k$$

$$p > w + r$$

Her vil maksimal profit opnås ved at maksimere mængden af input (i 1:1 forhold). Hvis $p < w + r$, vil optimum være ved nul produktion. Hvis de er lig hinanden vil alle kombinationer af input i 1:1 være profitmaksimerende.

(d) Den nødvendige mængde arbejdskraft, når k og y er ved et fast niveau er givet ved $\ell \geq k$, idet der er tale om perfekte komplementær.

Opgave 3

Vi betragter produktionsfunktionen med ikke negative input:

$$f(\ell, k) = \sqrt{\min\{\ell, k\}} \quad (13)$$

Med positive priser, (p, w, r) .

3.1 & 3.2

Virksomhedens omkostningsminimeringsproblem er:

$$\min_{\ell, k} w \cdot \ell + r \cdot k \quad \text{u.b.b.} \quad \sqrt{\min\{\ell, k\}} = y \quad (14)$$

Vi kan omskrive højresiden til:

$$\min\{\ell, k\} = y^2 \quad (15)$$

Hvis $\ell = y^2$ og $k \geq \ell$ kan vi ℓ i omkostningsfunktionen og få:

$$w \cdot y^2 + r \cdot k \quad (16)$$

Vi skal nu vælge den laveste værdi af k , hvor bibetingelsen er opfyldt. Det er klart tilfældet, når $y = \ell = y^2$. Altså:

$$w \cdot y^2 + r \cdot y^2 \iff y^2 \cdot (w + r) \quad (17)$$

Det samme argument gælder, hvis $k = y^2$ og $\ell \geq k$, her får vi:

$$w \cdot \ell + r \cdot y^2 \quad (18)$$

Hvor den værdi af ℓ , der minimerer ovenstående er $\ell = k$, som giver nøjagtig samme resultat som 17.

3.3

Vi ser, at produktionsfunktionen har aftagende skalaafkast:

$$f(t\ell, tk) = \sqrt{\min\{t\ell, tk\}} = \sqrt{t \cdot \min\{\ell, k\}} = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\min\{\ell, k\}} = \sqrt{t} \cdot f(\ell, k) \quad (19)$$

Hvilket harmonerer med, at der er stigende gennemsnitsomkostninger, da:

$$AC = \frac{y^2 \cdot (w + r)}{y} = y \cdot (w + r) \quad (20)$$

3.4

Vi fandt det omkostningsminimerende ved forbrug ved givet y til at være $y^2 \cdot (w + r)$. Da er profitten:

$$\pi = p \cdot y - y^2 \cdot (w + r) \quad (21)$$

Den profitmaksimerende produktion opfylder da, at:

$$\begin{aligned} p - 2y \cdot (w + r) &= 0 \\ 2y(w + r) &= p \\ y &= \frac{p}{2 \cdot (w + r)} \end{aligned}$$

Som giver anledning til følgende optimale inputniveauer:

$$\ell = k = y^2 = \left[\frac{p}{2 \cdot (w + r)} \right]^2$$

Profitten bliver her:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{p^2}{2 \cdot (w + r)} - \left[\frac{p}{2 \cdot (w + r)} \right]^2 \cdot (w + r) \\ &= \frac{p^2}{2 \cdot (w + r)} - \frac{p^2}{4 \cdot (w + r)} \\ &= \frac{2p^2}{4 \cdot (w + r)} - \frac{p^2}{4 \cdot (w + r)} \\ &= \frac{p^2}{4 \cdot (w + r)} \end{aligned}$$

Opgave 4

Vi betragter produktionsfunktionen:

$$f(x_1, x_2) = [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]^2 \quad (22)$$

For ikke negative input.

4.1

For $c > 0$ har vi:

$$\begin{aligned} [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]^2 &= c \\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= \sqrt{c} \end{aligned}$$

$$x_2 = [\sqrt{c} - \sqrt{x_1}]^2$$

4.2

Vi finder de afledte:

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{2 \cdot [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]}{2\sqrt{x_1}}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{2 \cdot [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]}{2\sqrt{x_2}}$$

Hvorfor $|TRS|$ er:

$$\frac{2 \cdot [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]}{2\sqrt{x_1}} \cdot \frac{2\sqrt{x_2}}{2 \cdot [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

4.3

Isokvanten gennem punktet (1,1) har formen:

$$[\sqrt{c} - \sqrt{x_1}]^2 = 1$$

$$c - 2\sqrt{c} + 1 = 1$$

$$c^2 - 4 \cdot c = 0$$

$$c \cdot (c - 4) = 0$$

$$c = 4 \quad \text{da vi kun betragter } c > 0$$

Vi tegner nu isokvanten gennem punktet (1,1):

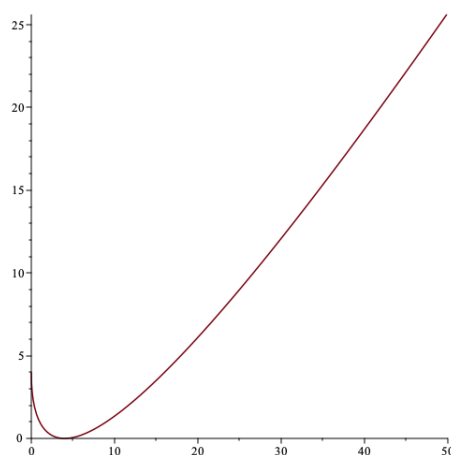


Figure 1: Isokvanten for f gennem (1,1)

Vi ser, at MRS er aftagende mellem 0 og 4, hvorefter den tiltager. Den økonomiske intuition er, at der i punktet til venstre for $x_1 = 4$ gælder, at virksomheden er villig til at opgive nogle enheder af

x_2 for at få en enhed mere af x_1 , og fortsat have samme produktion. Til højre for $x_1 = 4$ er x_1 er MRS voksende, da det er *så dårligt i produktionen*, at virksomhederne kræver enheder af x_2 for at få en enhed mere af x_1 . I praksis vil virksomhederne dog aldrig ligge sig til højre for $x_1 = 4$, da de kan producere samme mængde (heraf isokvanten) ved et lavere niveau af begge input og dermed lavere omkostninger. Bemærk, at den stigende MRS ikke giver økonomisk mening, idet vi bør begrænse vores analyse til: $\sqrt{c} - \sqrt{x_1} > 0$.

Opgave 5

Vi betragter en produktionsfunktion af formen:

$$f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} \quad (23)$$

Hvor $p > 0$.

5.1

Profitmaksimeringsproblemet er:

$$\max_{\ell, k} p \cdot \ell^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} - w \cdot \ell - r \cdot k \quad (24)$$

FOC bliver:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot p \cdot \ell^{-\frac{2}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} - w &= 0 \\ \frac{1}{3} \cdot p \cdot k^{-\frac{2}{3}} \cdot \ell^{\frac{1}{3}} - r &= 0 \end{aligned}$$

Vi ganger nu første udtryk med ℓ og andet med k og får:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot p \cdot y - w\ell &= 0 \\ w\ell &= \frac{1}{3} \cdot p \cdot y \\ \ell &= \frac{p \cdot y}{3w} \end{aligned}$$

Samt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot p \cdot y - rk &= 0 \\ k &= \frac{p \cdot y}{3r} \end{aligned}$$

Den producerede mængde bliver da:

$$\begin{aligned}
 y &= \left[\frac{p \cdot y}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{p \cdot y}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} \\
 y &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{p}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \\
 y^{\frac{1}{3}} &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{p}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} \\
 y &= \frac{p}{3w} \cdot \frac{p}{3r} \\
 y &= \frac{p^2}{9wr}
 \end{aligned}$$

Efterspørgslen efter kapital og arbejdskraft bliver:

$$\begin{aligned}
 \ell^* &= \frac{p^3}{27w^2r} \\
 k^* &= \frac{p^3}{27wr^2}
 \end{aligned}$$

5.2

Omkostningsminimeringsproblemet er:

$$\min w \cdot \ell + r \cdot k \quad \text{u.b.b.} \quad y = \ell^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L} = w \cdot \ell + r \cdot k + \lambda \cdot (y - \ell^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}}) \quad (26)$$

Med FOC:

$$\begin{aligned}
 w - \frac{1}{3} \lambda \cdot \ell^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{1}{3}} &= 0 \\
 r - \frac{1}{3} \lambda \cdot \ell^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} &= 0 \\
 y - \ell^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} &= 0
 \end{aligned}$$

Ud fra de første to ligninger får vi:

$$\begin{aligned}
 \frac{w}{r} &= \frac{\frac{1}{3} \lambda \cdot \ell^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} \lambda \cdot \ell^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}}} = \frac{k}{\ell} \\
 k &= \frac{w}{r} \cdot \ell
 \end{aligned}$$

Vi indsætter:

$$y = \ell^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{w}{r} \cdot \ell \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \ell^{\frac{2}{3}} \frac{w^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{1}{3}}}$$

$$\ell^{\frac{2}{3}} = y \cdot \frac{r^{\frac{1}{3}}}{w^{\frac{1}{3}}}$$

$$\ell^* = \left[y \left(\frac{r}{w} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} = y^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{w} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vi kan nu blot indsætte tilbage for at finde den betingede faktorefterspørgsel efter kapital:

$$k = w \cdot r^{-1} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}$$

$$= y^{\frac{3}{2}} \left(\frac{w}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

5.3

Vi fandt den langsigtede efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital, som funktion af prissystemet til at være:

$$\ell^* = \frac{p^3}{27w^2r}$$

$$k^* = \frac{p^3}{27wr^2}$$

Derfor bliver de totale omkostninger:

$$TC = w \cdot \frac{p^3}{27w^2r} + r \cdot \frac{p^3}{27wr^2} = \frac{p^3}{27wr} + \frac{p^3}{27wr} = \frac{2p^3}{27wr}$$

Vi kan nu finde de marginale omkostninger ved at differentiere udtrykket mht. y . Vi ser dog, at y ikke umiddelbart indgår, hvorfor vi skal udtrykke p som funktion af y ved hjælp af den producerede mængde, da:

$$y = \frac{p^2}{9wr}$$

$$p = \sqrt{y \cdot 9wr}$$

$$= 3\sqrt{ywr}$$

Vi sætter tilbage ind i TC:

$$TC = \frac{2 \cdot 27 \cdot (ywr)^{\frac{3}{2}}}{27wr}$$

$$= 2 \cdot y^{\frac{3}{2}} (wr)^{\frac{1}{2}}$$

Hvorefter vi kan differentiere:

$$MC = \frac{\delta TC}{\delta y} = 3 \cdot \sqrt{wr} \cdot \sqrt{y} = 3 \cdot \sqrt{wry}$$

Vi ved, at der i en kompetiv markedsligevægt gælder, at $MC = p$, derfor har vi, at den langsigtede udbudskurve er givet ved:

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot \sqrt{wry} \\ p^2 &= 9wry \\ y &= \frac{p^2}{9wr} \end{aligned}$$

Som er nøjagtig det samme svar vi fik førhen.

5.4

Vi kan nu indsætte den producerede mængde til givne priser (udbudskurven) ind i de betingede faktorefterspørgsler. Altså:

$$\begin{aligned} \ell &= \left[\frac{p^2}{9wr} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^{\frac{1}{2}}}{w} \\ &= p^3 9^{-\frac{3}{2}} w^{-\frac{3}{2}} r^{-\frac{3}{2}} r^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{p^3}{27w^2r} \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned} k &= \left[\frac{p^2}{9wr} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{r} \\ &= \frac{p^3}{27wr^2} \end{aligned}$$

Som er nøjagtig det samme svar vi fik i 5.1.

5.5

På kort sigt bliver produktionsfunktionen:

$$y = \ell^{\frac{1}{3}} \bar{k}^{\frac{1}{3}} \iff \ell = \frac{y^3}{\bar{k}} \quad (27)$$

De samlede omkostninger på kort sigt er altså:

$$SRTC = w \cdot \frac{y^3}{\bar{k}} + r \cdot \bar{k}$$

Den ønskede efterspørgsel efter arbejdskraft kan findes ved at betragte den samlede profit:

$$\pi = p \cdot \ell^{\frac{1}{3}} \bar{k}^{\frac{1}{3}} - w\ell - r\bar{k} \quad (28)$$

Som vi skal differentiere mht. ℓ og sætte lig 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \ell^{-\frac{2}{3}} \bar{k}^{\frac{1}{3}} - w &= 0 \\ \ell^{-\frac{2}{3}} &= \frac{3w}{p\bar{k}^{\frac{1}{3}}} \\ \ell &= \left[\frac{p\bar{k}^{\frac{1}{3}}}{3w} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Den ønskede produktion er da:

$$\begin{aligned} y &= \left[\left[\frac{p\bar{k}^{\frac{1}{3}}}{3w} \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \bar{k}^{\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{p\bar{k}^{\frac{1}{3}}}{3w} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{k}^{\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{k}^{\frac{1}{6}} \cdot \bar{k}^{\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{k}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{p\bar{k}}{3w} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$