

Mikroøkonomi I: Ugeseddel 8

Levi van Boekel

Uge 44, 2024

Opgave 1

Vi betragter et marked med efterspørgselskurven givet ved:

$$D(p) = a - 2p \quad (1)$$

når $p \leq \frac{a}{2}$, hvor $a > 4$. Udbudskurven er givet ved følgende, for $p \geq 1$;

$$S(p) = p^2 - 2p + 1 \quad (2)$$

1.1

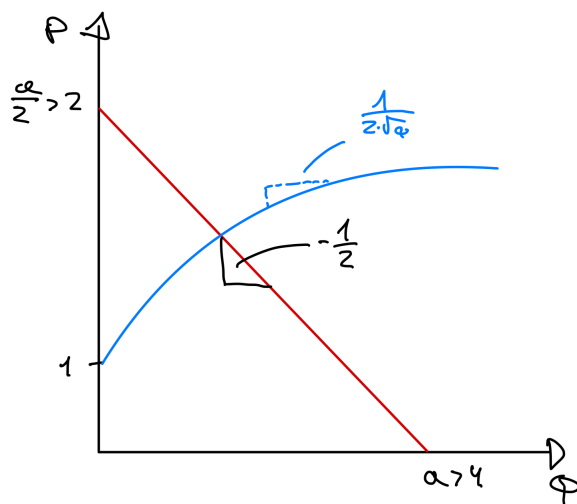
For at skitsere kurverne, inverteres, de. Da:

$$\begin{aligned} q &= a - 2p \\ -2pq - a \\ P_D(q) &= \frac{a}{2} - \frac{q}{2} \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned} q &= (p - 1)^2 \\ p - 1 &= \sqrt{q} \\ P_S(q) &= \sqrt{q} + 1 \end{aligned}$$

Som er skitseret nedenfor;

Figure 1: Principskitse af P_S og P_D

1.2

Elasticiteten af udbudskurven er defineret som:

$$E_S = \frac{\delta S(p)}{\delta p} \cdot \frac{p}{S(p)} \quad (3)$$

Hvorfor vi har:

$$E_S = \frac{2p^2 - 2p}{p^2 - 2p + 1} = \frac{2p^2 - 2p}{(p - 1)^2} \quad (4)$$

1.3

For ligevægtsprisen skal det gælde, at:

$$\begin{aligned} a - 2p &= p^2 - 2p + 1 \\ p^2 + 1 - a &= 0 \\ p^2 &= a - 1 \\ p &= \sqrt{a - 1} \end{aligned}$$

1.4

Vi ved, at der gælder:

$$\begin{aligned} p_b &= p + t \\ p_s &= p - t \end{aligned}$$

Alt afhængigt af, hvem der skal betale skatten. Vi kan sætte begge ind i vores ligevægtsbetingelse for at finde prisen som køberne skal betale, men det er nemmest, hvis vi bruger det andet, da vi her ikke skal lægge t til

$$a - 2p = (p - 1 - 1)^2$$

$$a - 2p = (p - 2)^2$$

$$a - 2p = p^2 - 4p + 4$$

$$p^2 - 2p + (4 - a) = 0$$

$$p_b = 1 + \sqrt{a - 3}$$

Hvor sælger prisen så er $p_s = p_b - t = \sqrt{a - 3}$. Vi havde helt analogt kunne løse:

$$a - 2(p + 1) = (p - 1)^2$$

$$p_s = \sqrt{a - 3}$$

Hvor køberprisen så er $p_b = p_s + t = 1 + \sqrt{a - 3}$.

1.5

Markedsligevægten med afgift kan skitseres som:

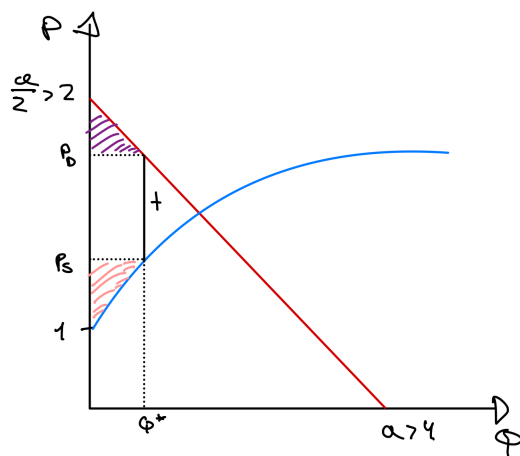


Figure 2: Principskitse af den nye markedsligevægt

1.6

Vi ser, at køberprisen er stigende i a , mens sælgerprisen er faldende. Dermed vil køberne betale den første skattebyrde, hvis a er stort, mens sælgerne vil betale en større skattebyrde, hvis a er lille. De forskellige værdier af a beskriver hvor elastisk efterspørgslen er (løst sagt), hvor en høj værdi af a gør efterspørgselskurven meget inelastisk, hvorfor hele skattebyrden (stort set, ved stort a)

betales af køberne. Vice versa, hvis a er småt, her er efterspørgslen meget prisfølsom og den rette linje vil da være mere stejl.

Opgave 2

Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{a}x_1^a + bx_2 \quad (5)$$

2.1

Grænsenyttene er:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta x_1} &= x_1^{a-1} \\ \frac{\delta u}{\delta x_2} &= b \end{aligned}$$

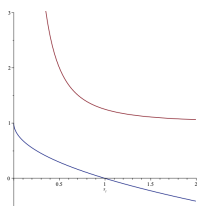
Indifferenskurverne har formen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{a}x_1^a + bx_2 \\ x_2 &= \frac{u - \frac{1}{a}x_1^a}{b} = \frac{u}{b} - \frac{1}{ab}x_1^a. \end{aligned}$$

Her er den første og andenaflædte givet ved:

$$\begin{aligned} x_2' &= -\frac{1}{b} \cdot x^{a-1} \\ x_2'' &= -\frac{1}{b} \cdot (a-1) \cdot x^{a-2} \end{aligned}$$

Den andenaflædte er altid positiv, da $(a-1) > 0$, idet $a < 1$. Vi har altså konvekse indifferenskurver, og monotone præferencer, da begge grænsenyttene er voksende, uanset om $a > 0$ eller ej. Det ses også i nedenstående illustration af indifferenskurverne med hhv. $u = 2, b = 2, a = -2$ og $u = 2, b = 2, a = 1$, da alle punkter nordøst for et givet punkt ligger i det indre af den vore konturmængde. Vi kan ligeledes bekræfte konvexitet ved at linearkombinationer af to punkter ligger i det indre af den øvre konturmængde.

Figure 3: Indifferenskurverne med forskellige værdier af a

2.2

MRS er givet ved:

$$|MRS| = |-x_1^{a-1} \cdot \frac{1}{b}| = x_1^{a-1} \cdot \frac{1}{b}$$

Da $a < 1$ er potensen altid negativ. Vi ser, at når $x_1 \rightarrow 0$, går MRS mod ∞ , svarende til, at der er essentialitet i x_1 . Der er omvendt ikke essentialitet i x_2 , hvorfor der her kan forekomme randløsninger. I det hele taget ser vi, at jo højere (numerisk) a er, jo stejlere bliver MRS ved små værdier af x_1 . Forbrugerens problem kan da opstilles matematisk som følger, idet vi har vist, at præferencerne er monotone. Vi bemærker, at vi kun finder indre løsninger, hvorfor vi løser randløsningen senere.

$$\max_{x_1, x_2} \frac{1}{a} x_1^a + b x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (6)$$

FOC:

$$\begin{aligned} x_1^{a-1} - \lambda p_1 &= 0 \\ b - \lambda p_2 &= 0 \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{a-1}}{b} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_1^* &= \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

Det optimale forbrug af x_2 er da:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} + p_2 x_2 &= m \\ x_2^* &= \frac{m - p_1 \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}}}{p_2} \end{aligned}$$

Vi har dog kun positivt forbrug af x_2 , hvis:

$$\begin{aligned} \frac{m}{p_1} - p_1 \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} &> 0 \\ m - p_1 \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} &> 0 \end{aligned}$$

Marhsall efterspørgslen er da:

$$\begin{cases} (\frac{m}{p_1}, 0) & \text{hvis } m - p_1 \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} \leq 0 \\ (\left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}}, \frac{m - p_1 \left[\frac{p_1 b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}}}{p_2}) & \text{ellers} \end{cases} \quad (7)$$

2.3

Vi definerer elasticiteten som:

$$\varepsilon_{x_1, p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \times \frac{p_1}{x_1} \quad (8)$$

Det første led er da:

$$\begin{aligned} (p_1^{\frac{1}{a-1}} \cdot \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}})' &= \frac{1}{a-1} p_1^{\frac{1}{a-1}-1} \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} \\ &= \frac{1}{a-1} p_1^{\frac{2-a}{a-1}} \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

Det andet led er:

$$p_1 \cdot \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{-1}{a-1}} \cdot p_1^{\frac{-1}{a-1}}$$

Vi har altså:

$$\frac{1}{a-1} p_1^{\frac{2-a}{a-1}} \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{1}{a-1}} \times p_1^{\frac{-1}{a-1}} \cdot \left[\frac{b}{p_2} \right]^{\frac{-1}{a-1}} = \frac{1}{a-1} \quad (9)$$

Opgave 3

3.1

En vandret efterspørgselskurve, som vist i 15.9, er netop beskriver netop en perfekt elastisk efterspørgselskurve som beskrevet. Hvis vi blot hæver prisen en smule, vil den være 0, mens den vil være *uendelig* (løst sagt), ved priser under 200.

3.2

I ligevægt gælder der, at prisen på arbejdskraft (uden skat) er 200. Her er udbuddet:

$$S((1-t) \cdot 200) = 2 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot (1-t) = 2 \cdot 10^8 \cdot (1-t) \quad (10)$$

3.3

Da virksomhederne betaler 200 per enhed arbejdskraft, og staten får t pct. af den samlede omsætning på markedet, bliver det samlede provenu lig omsætning (udbud gange pris) gange skattesatsen, altså:

$$(2 \cdot 10^8 \cdot (1-t)) \times 200 \times t = 4 \cdot 10^{10} \cdot t \cdot (1-t) \quad (11)$$

Lafferkurven viser sammenhængen mellem det samlede provenu og skattesatsen, den er visualiseret nedenfor:

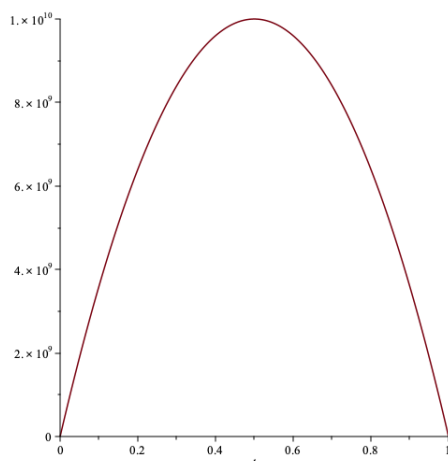


Figure 4: Lafferkurven

Og har toppunkt i $t = .5$.

Opgave 4

4.1

For at skitsere de to kurver inverteres de. Da;

$$\begin{aligned} q &= a \cdot e^{-bp} \\ \ln(q) &= \ln(a) - bp \\ -bp &= \ln(q) - \ln(a) \\ D(Q) &= -\frac{1}{b} \times (\ln(q) - \ln(a)) \end{aligned}$$

Og:

$$q = c \cdot e^{dp}$$

$$\ln(q) = \ln(c) + dp$$

$$S(Q) = \frac{1}{d} \times (\ln(q) - \ln(c))$$

Altså har vi;

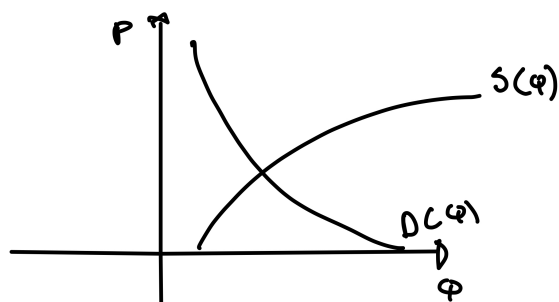


Figure 5: Principskitse af kurverne

Antagelsen om $a > c$ sikrer, at skæringen sker i første kvadrant, idet c a angiver skæringen med førstaksen, idet der i skæringen gælder, at:

$$0 = \frac{1}{d} \times (\ln(q) - \ln(c))$$

$$q = c$$

4.2

Ligevægtsprisen skal opfylde, at;

$$c \cdot e^{dp} = a \cdot e^{-bp}$$

$$\ln(c) + dp = \ln(a) - bp$$

$$p \cdot (d + b) = \ln(a) - \ln(c)$$

$$p = \ln\left(\frac{a}{c}\right) \cdot \frac{1}{(d + b)}$$

Idet $\ln$ er strengt voksende, medfører $a > c$, at $\ln(a) - \ln(c) > 0$, hvorfor ligevægtsprisen er positiv, idet konstanterne ligeledes er positive.

4.3

En højere værdi af a øger ligevægtsprisen, idet det sikrer, at efterspørgselskurven skærer førstaksen mere til højre og skæringen mellem de to kurver dermed sker ved et højere prisniveau. Omvendt gør en højere værdi af c ligevægtsprisen mindre, idet skæringen her ligeledes rykker til højre, men

det presser prisen nedad. Et højere niveau af både d og b mindsker ligevægtsprisen, da kurverne her bliver fladere i enderne og skæringen sker ved et lavere niveau og vice versa, hvis parametrene bliver mindre (her bliver kurverne stejlere).

Opgave 5

5.1 & 5.2

Prisen som køberne betaler i markedsligevægt er:

$$\begin{aligned} 100 \cdot e^{-p_b} &= 10 \cdot e^{p_b - t} \\ 10 &= e^{2p_b - 2} \\ \ln(10) &= 2p_b - 2 \\ p_b &= \frac{\ln(10)}{2} + 1 \end{aligned}$$

Sælgerne betaler $p_b - t = \frac{\ln(10)}{2} - 1$

5.3 & 5.4

Principskitsen er gengivet nedenfor:

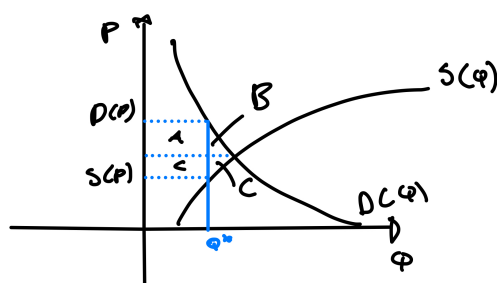


Figure 6: Principskitse af kurverne med dødvægtstab

Vi bemærker, at den oprindelige markedsligevægt uden skatter er givet ved:

$$P^* = \ln(10) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ln(10)}{2} \quad (12)$$

Vi kan altså bestemme arealet $A + B$ ved:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\ln(10)}{2}}^{\frac{\ln(10)}{2} + 1} 100 \cdot e^{-p} dp &= 100 \times \int_{\frac{\ln(10)}{2}}^{\frac{\ln(10)}{2} + 1} e^{-p} dp \\ &= 100 \times [-e^p]_{\frac{\ln(10)}{2}}^{\frac{\ln(10)}{2} + 1} \\ &\approx 19.990 \end{aligned}$$

For at finde arealet af B skal vi nu finde ligevægtsmængden med skatten, som:

$$100 \cdot e^{-(\frac{\ln(10)}{2}+1)} \approx 11.63 \quad (13)$$

Vi kan nu bestemme arealet af A som et rektangel med sidelængden $\frac{\ln(10)}{2} + 1 - \frac{\ln(10)}{2} = 1$ og højden 11.63. Derfor er arealet af B residualet og nødvendigvis givet ved:

$$B \approx 19.990 - 11.63 \approx 8.36 \quad (14)$$

Arealet af $C + D$ er nu:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\ln(10)}{2}-1}^{\frac{\ln(10)}{2}} 10 \cdot e^p dp &= 10 \times \int_{\frac{\ln(10)}{2}-1}^{\frac{\ln(10)}{2}} e^p dp \\ &= 10 \times [e^p]_{\frac{\ln(10)}{2}-1}^{\frac{\ln(10)}{2}} \\ &\approx 19.990 \end{aligned}$$

Hvor D blot er ≈ 8.36 igen. Dødvægtstabet er summen af $B + D$ og bliver da: $B + D \approx 16.72$, mens skatteprovenuet er lig ≈ 22.72 og betales ligeligt af købere og sælgere.