

Mikroøkonomi I: Ugeseddel 9

Levi van Boekel

Uge 45, 2024

Opgave 1

Vi betragter en bytteøkonomi med to forbrugere, der initialt har beholdningerne:

$$\omega_A = (5, 10) \quad \text{og} \quad \omega_B = (10, 5) \quad (1)$$

Begge forbrugere, i , har nyttefunktionen:

$$u(x_i^1, x_i^2) = (x_i^1)^3 \cdot (x_i^2)^2 \quad (2)$$

1.1

En allokering siges at være opnåelig, hvis den samlede mængde, der bliver forbrugt er lig den samlede mængde, der er til rådighed. Altså:

$$\omega_A^1 \omega_B^1 = x_A^1 + x_B^1 \quad (3)$$

$$\omega_A^2 \omega_B^2 = x_A^2 + x_B^2 \quad (4)$$

$$(5)$$

Det er klart, at det er opfyldt i opgavens eksempel, da:

$$5 + 10 = 7 + 8$$

$$10 + 5 = 8 + 7$$

1.2

Edgeworthboksen er tegnet nedenfor:

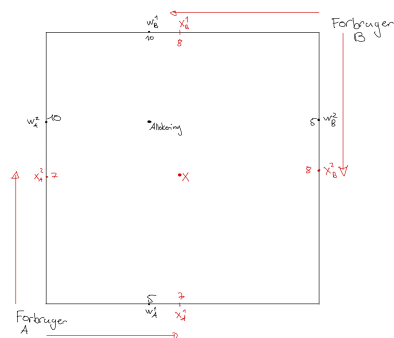


Figure 1: Principskitse af Edgeworthboks

1.3

Vi genkender præferencerne som Cobb Douglas præferencer, hvor nyttefunktionen er monotont voksende, differentiable og konkave. Indifferenskurverne er konvekse. Sidstnævnte indses ved at sætte (2) lig u og finde den anden ordens afledte (bemærk fodtegn fjernes):

$$u = x_1^3 \cdot x_2^2$$

$$x_2^2 = \frac{u}{x_1^3}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{u}{x_1^3}} = \sqrt{u} \cdot x_1^{-\frac{3}{2}}$$

Hvor den anden ordens afledte er positiv, idet vi kun betragter ikke-negative mængder:

$$\frac{15\sqrt{u}}{4x_1^{\frac{7}{2}}} \quad \text{for } x_1 > 0 \text{ er hele udtrykket } > 0 \quad (6)$$

dvs. indifferenskurvene er strengt konvekse. Det kan også ses nedenfor: Som er velkendt resultat

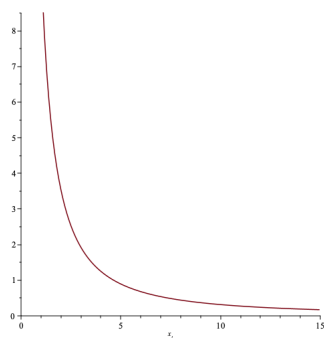


Figure 2: Indifferenskurve for forbrugerne

for CD præferencer. Det marginale substitutionsforhold for begge forbrugere (siden de har samme præferencer) er:

$$MRS = \frac{3x_1^2 \cdot x_2^2}{2x_1^3 x_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x_2}{x_1} \quad (7)$$

I punktet har forbruger A således MRS :

$$MRS_A = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3}{2} \quad (8)$$

Og tilsvarende for forbruger B:

$$MRS_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{8} = \frac{3}{2} \quad (9)$$

Allokeringen er dermed Pareto efficient ¹, idet der ikke kan foretages nogle yderligere handler, der stiller en forbruger strengt bedre uden at stille den anden værre (det kan vises ved et simpelt grafisk argument, idet der i punkter, hvor der ikke er tangens — med undtagelse af randløsninger), vil opstå et *rum* som forbrugerne kan handle ind i, hvor mindst en stilles bedre).

1.4

Budgetlinjen er indtegnet i Edgeworthboksen nedenfor:

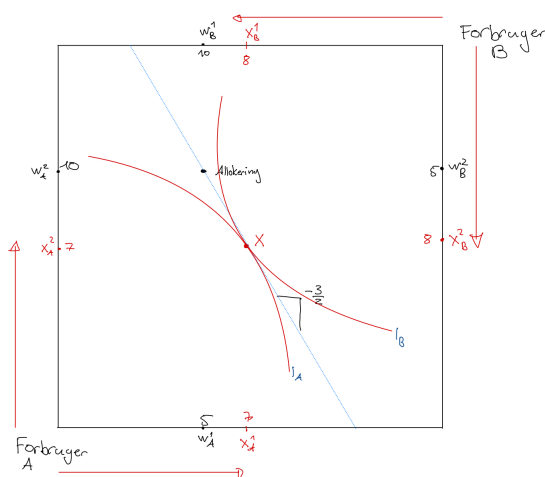


Figure 3: Edgeworthboks med budgetlinje

Vi ser straks, punktet X udgør en Walrasligevægt, idet begge forbrugere nyttemaksimerer, da MRS er lig prisforholdet og dermed vælger det strengt bedste forbrugsbundt, der er opnåeligt for dem, samtidig med, at de befinder sig i et opnåeligt punkt. Vi ser, at forbruger A sælger gode 2, men køber gode 1, mens forbruger B køber gode 2 og sælger gode 1. Det er klart, at den initiale allokering ligger på budgetlinjen, da den samlede indkomst i bytteøkonomien er:

$$m = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 15 = 75 \quad (10)$$

Og det i den initiale beholdning gælder, at:

$$5 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 75 \quad (11)$$

¹NB: tangens er en tilstrækkelig, men ikke nødvendig betingelse, da det ikke gælder i randløsninger der alligevel kan være Pareto efficiente

Opgave 2

2.1 & 2.2

Det ønskede er tegnet nedenfor:

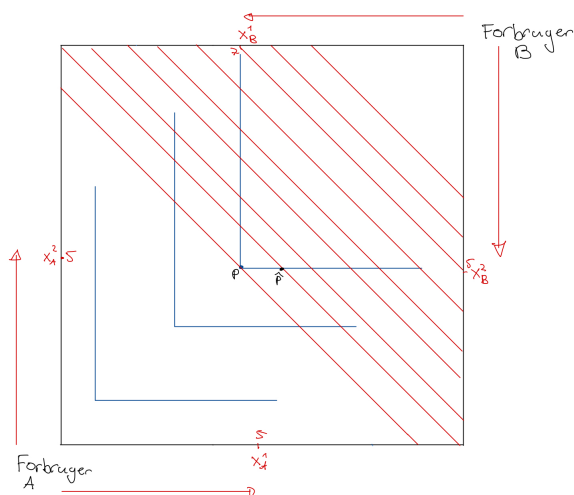


Figure 4: Principskitse af Edgeworthboks

Vi ser, at punktet P er Paratoefficient, samtidig med, at forbruger A får nytten 5, idet man ikke kan stille nogle af forbrugerne strengt bedre uden at stille den anden dårligere. Vi ser samtidig, at punktet $\hat{P}$ ikke er Pareto efficient, idet man her vil kunne stille forbruger A bedre ved at lade ham bytte opad (dvs. sælge gode 1), uden at stille forbruger B dårligere.

2.3 & 2.4

Den nye paratoefficiente allokering er tegnet nedenfor:

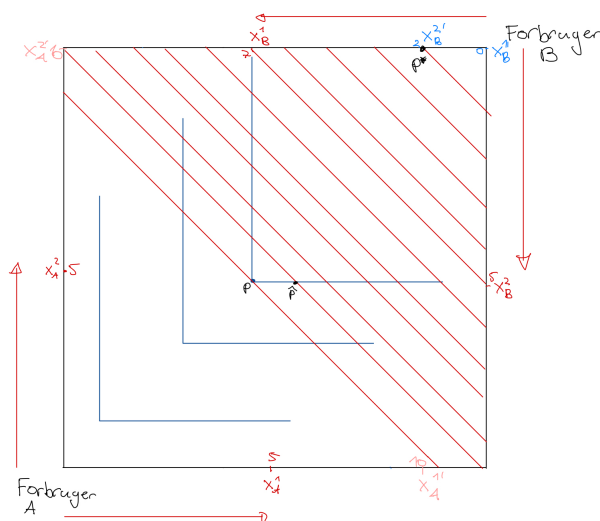


Figure 5: Principskitse af Edgeworthboks med nyt punkt

Forbruger A har nu 10 enheder af hver vare, mens forbruger B har $(0, 2)$. Det er klart, at der ikke findes nogen Paretoefficiant allokering, hvor forbruger A får strengt mere end 10 enheder af vare 1, idet han har ikke vil få mere nytte (hans præferencer beskriver perfekte komplementer), mens forbruger B vil få mere nytte at få den ekstra enheder af vare 1, som forbruger A har. Man vil med andre ord kunne stille forbruger B bedre gennem handel uden at stille forbruger A værre, hvorfor et sådant punkt ikke kan være optimalt (NB: forbruger A 's indifferenskurve vil ligge på randen, og forbruger B vil derfor bytte frem mod skæringen mellem knækket og hans egen indifferenskurve, ikke tegnet her).

Opgave 3

Vi betragter to forbrugere med nyttefunktionerne:

$$u_A(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{og} \quad u_B(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad (12)$$

Den samlede initialbeholdning i økonomien er $\omega = (10, 12)$.

3.1

Forbruger A 's indifferenskurver findes ved at sætte nytteniveauet konstant og løse for x_2 . Altså:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x_1} + x_2 &= \hat{u} \\ x_2 &= \hat{u} - 4\sqrt{x_1} \end{aligned}$$

For at teste om, der er randløsninger findes MRS:

$$MRS = \frac{4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}}}{1} = \frac{2}{\sqrt{x_1}}$$

Vi ser, at når $x_1 \rightarrow 0$, går MRS mod ∞ , hvilket betyder, at der er essentialitet i x_1 . Omvendt afhænger MRS ikke af x_2 (og kan derfor ikke gå mod 0 når $x_2 \rightarrow 0$), hvorfor der ikke kan være randløsninger her i x_2 . Det er et klassisk resultat for kvasilineære goder, at der kan være randløsninger i det lineære led.

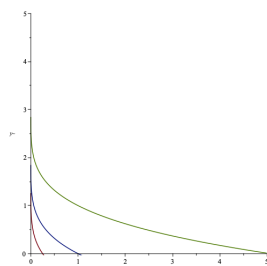


Figure 6: Indifferenskurver for forskellige værdier af u (rød= $u = 1$, blå $u = 2$, grøn $u = 3$)

3.2

Edgeworthboksen med indifferenskurverne er indtegnet nedenfor:

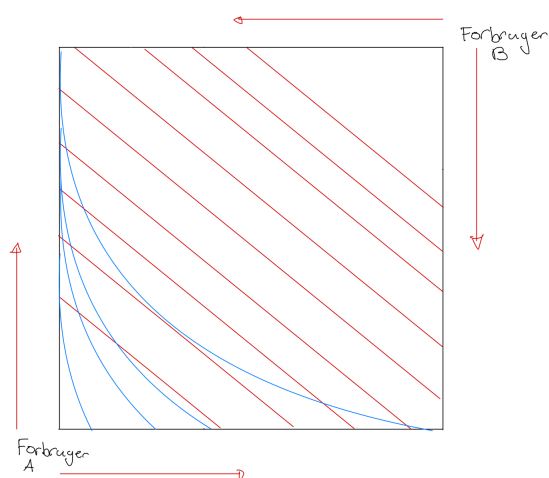


Figure 7: Edgeworthboks med indifferenskurver

3.3

Det marginale substitutionsforhold for forbruger B er lig 1. Vi skal derfor løse:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{x_A^1}} &= 1 \\ 2 &= \sqrt{x_A^1} \\ 4 &= x_A^1\end{aligned}$$

Som viser, at de marginale substitutionsforhold kun kan være ens, hvis forbruger A får 4 enheder af gode 1, som er hans ikke-lineære led i nyttefunktionen.

3.4

Kontraktkurven angiver alle Pareto efficiente allokeringer, hvor det gælder, at ingen forbruger kan blive strengt bedre stillet uden at en anden forbruger bliver dårligere stillet. I et indre optimum (efficient allokering) gælder det, MRS skal være ens for de to forbrugere, da der ellers skabes et rum imellem de to kurver, som som de kan handle ind i og derigennem øge deres nytte. Da forbruger A her har kvasilineær nytte vil han altid bruge en fast del af sin indkomst på vare 1, og den eneste indre efficiente allokering er da i det punkt, hvor $x_A^1 = 4$, som dermed er den allokering (sammen med de øvre goder der skal allokeres til forbruger A og B) er det eneste punkt på kontraktkurven.

3.5

Allokeringer med $x_A^1 = 4$, der ligger på randen af Edgeworthboksen (dvs. $x_A^2 = 0$) er også Pareto efficiente allokeringer, og udgør dermed en del af kontraktkurven, idet forbruger A kan ligge sig i en sådan randløsning, hvor indifferenskurverne mellem de to forbrugere tangerer og forbruger A dermed vil handle *op* og forbruger B vil handle *ned*, hvilket betyder, at der ikke er nogen måde en af dem kan stilles strengt bedre uden at stille den anden dårligere.

3.6

Hvis $x_A^1 < 4$ er vi som udgangspunkt ikke i en Pareto efficient allokering, da MRS for gode 1 forbruger A er højere end for forbruger B . A vil altså være interesseret i at bytte enheder af vare 2 for at få flere enheder af vare 1. Men fordi, at han ikke har nogle enheder af vare 2 er det ikke muligt for ham at gennemføre sådanne handler, og han kan dermed ikke stilles bedre uden at stille forbruger 2 dårligere. Det kan ses i Edgeworth boksen ved at forbruger A vil bytte udad, men jo ikke kan give nogle enheder af vare B for at lade byttehandlen finde sted.

3.7

Det samme som i 3.6 gælder her, idet $x_A^1 > 4$ betyder, at MRS for gode 1 er højere for forbruger B end for forbruger A . Det vil i udgangspunktet ikke være efficient, men fordi forbruger 1 forbruger alle enheder af vare 2, er det ikke muligt for forbruger 2 at indgå i nogle byttehandler med forbruger 1, der vil stille ham bedre. Det svarer til, at vi er oppe på toppen af Edgeworthboksen og forbruger B vil bytte nedad, men jo ikke kan det, da han ikke har nogle enheder af vare 2.

Opgave 4

Vi betragter to forbrugere, der initialt ejer bundterne:

(13)

Forbrugerne har nyttefunktioner:

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = 4 \cdot \sqrt{x_A^1 + x_A^2} \quad \text{og} \quad u_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 \cdot x_B^2 \quad (14)$$

4.1

Vi har vist, at den første nyttefunktion kan have randløsninger i $x_A^2 = 0$. Vi ved også, at præference er konvekse og monotont voksende, hvorfor den indre løsningen er et maksimum. Vi finder nu de

indre og tjekker herefter randløsningen (og fjerner fodtegn)

$$\arg \max_{x_1, x_2} 4 \cdot \sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{u.b.b} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (15)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 4 \cdot \sqrt{x_1} + x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) \quad (16)$$

Med FOC:

$$\begin{aligned} \frac{4}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 &= 0 \\ 1 - \lambda p_2 &= 0 \\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Vi dividerer den første med den anden:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x_1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \sqrt{x_1} &= \frac{2p_2}{p_1} \\ x_1 &= \frac{4p_2^2}{p_1^2} \end{aligned}$$

Og indsætter herefter i budgetbegrænsningen for at finde x_2 :

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \frac{4p_2^2}{p_1^2} + p_2 x_2 &= m \\ x_2 &= \frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1} \end{aligned}$$

Vi fandt, at der ikke var essentialitet i x_2 og skal derfor tjekke, hvornår løsningen er opfyldt:

$$\begin{aligned} \frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1} &> 0 \\ \frac{m}{p_2} &> \frac{4p_2}{p_1} \\ m &> \frac{4p_2^2}{p_1} \end{aligned}$$

Altså er Marshall efterspørgslen:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \left(\frac{4p_2^2}{p_1^2}, \frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1} \right) & \text{hvis } m > \frac{4p_2^2}{p_1} \\ \left(\frac{m}{p_1}, 0 \right) & \text{ellers} \end{cases} \quad (17)$$

For den anden forbruger har vi at gøre med Cobb Douglas præferencer, som er $p\grave{a}ne$ og derfor kun

har en unik indre løsning. Da:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2) \quad (18)$$

Med FOC:

$$\begin{aligned} x_2 - \lambda p_1 &= 0 \\ x_1 - \lambda p_2 &= 0 \\ m - p_1x_1 - p_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har videre:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{p_1x_1}{p_2} \end{aligned}$$

Som bliver:

$$\begin{aligned} x_1p_1 + p_1x_1 &= m \\ 2x_1p_1 &= m \\ x_1 &= \frac{m}{2p_1} \end{aligned}$$

Og for x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1 \frac{m}{2p_1}}{p_2} \\ x_2 &= \frac{\frac{m}{2}}{p_2} \\ x_2 &= \frac{m}{2p_2} \end{aligned}$$

Altså er Marshall efterspørgslen:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{m_B}{2p_1}, \frac{m_B}{2p_2} \right) \quad (19)$$

4.2

Vi gør nu forbrugerens indkomst endogen og lader prisen på vare 2 være lig 1. Da opnår vi for forbruger 1:

$$\begin{cases} \frac{4}{p_1^2} & \text{hvis } 16p_1 + 12 > \frac{4}{p_1} \\ \frac{\omega_A^1 \cdot p_1 + \omega_A^2 \cdot p_2}{p_1} & \text{ellers} \end{cases}$$

Betingelsen bliver:

$$\begin{aligned} 16p_1^2 + 12p_1 &> 4 \\ 16p_1^2 + 12p_1 - 4 &> 0 \\ 4p_1^2 + 3p_1 - 1 &> 0 \end{aligned}$$

Diskriminanten er:

$$D = 9 - (-16) = 25 \quad (20)$$

Rødderne bliver:

$$x_1 = \frac{-3 \pm 5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (21)$$

Fordi vi forkaster svaret med negative priser. Vi har altså:

$$\begin{cases} \frac{4}{p_1^2} & \text{hvis } p_1 > \frac{1}{4} \\ \frac{\omega_A^1 \cdot p_1 + \omega_A^2 \cdot p_2}{p_1} & \text{ellers} \end{cases}$$

For forbruger 2 har vi blot:

$$x_1 = \frac{p_1 \cdot 10 + 18}{2p_1} = \frac{5p_1 + 9}{p_1} = 5 + \frac{9}{p_1} \quad (22)$$

4.3

Den aggregerede nettoefterspørgsel i en indre løsning er:

$$\begin{aligned} z^1(p_1) &= \frac{4}{p_1^2} + 5 + \frac{9}{p_1} - 26 \\ &= \frac{4 + 9p_1}{p_1^2} - 21 \end{aligned}$$

Mens den i en randløsning blot bliver:

$$\begin{aligned} z^1(p_1) &= \frac{16p_1 + 12}{p_1} + 5 + \frac{9}{p_1} - 26 \\ &= 16 + \frac{12 + 9}{p_1} + 5 - 26 \\ &= \frac{21}{p_1} - 5 \end{aligned}$$

4.4 & 4.5

Walras lov siger nu, at vi kan finde en Walras ligevægt ved at sætte nettoefterspørgslen efter den ene vare lig 0, da det herfra følger, at nettoefterspørgslen for den anden vare også er 0. Vi starter

med den indre løsning:

$$\begin{aligned}\frac{4 + 9p_1}{p_1^2} - 21 &= 0 \\ \frac{4 + 9p_1}{p_1^2} &= 21 \\ 4 + 9p_1 &= 21p_1^2 \\ 21p_1^2 - 9p_1 - 4 &= 0 \\ p_1 &\approx 0.70051 \quad \text{fordi vi kun betragter positive priser}\end{aligned}$$

Her bliver efterspørgslen for forbruger A:

$$\begin{aligned}x_A^1 &= \frac{4}{0.70051^2} \approx 8.15 \\ x_A^2 &= \frac{16 \cdot 0.70051 + 12}{1} - \frac{4}{0.70051} \approx 17.5\end{aligned}$$

Og for forbruger B:

$$\begin{aligned}x_B^1 &= \frac{0.70051 \cdot 10 + 18}{2 \cdot 0.70051} \approx 17.8 \\ x_B^2 &= \frac{0.70051 \cdot 10 + 18}{2} \approx 12.5\end{aligned}$$

Som opfylder, at den samlede efterspørgsel er lig den samlede initiale beholdning.

I randløsningen har vi blot:

$$\begin{aligned}\frac{21}{p_1} &= 5 \\ p_1 &= \frac{21}{5} = 4.2\end{aligned}$$

Prisen er dog højere end selve kravet, der skulle være til randløsningen ($p_1 \leq 0.75$), hvorfor der ikke er nogen ligevægt i randløsningen.

4.6

Edgeworthboksen er skitseret nedenfor:

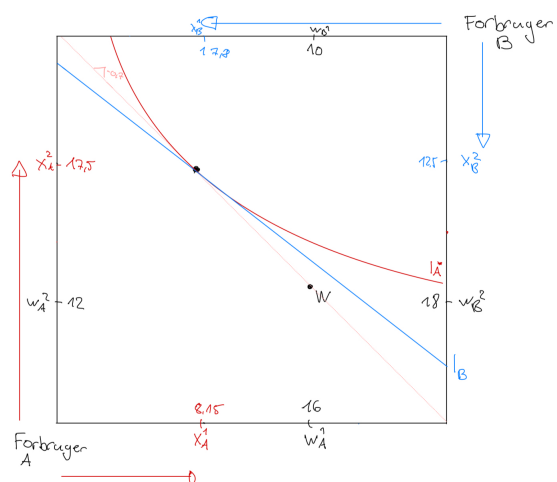


Figure 8: Edgeworthboks med optimum