

Makroøkonomi I: Ugeseddel 7

Levi van Boekel

Uge 45, 2024

Opgave 1

1.1

Den eksakte vækstrate er givet ved:

$$\begin{aligned}\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} &= \frac{(k_{t+1}^\alpha \cdot A_{t+1}^\beta \cdot x_{t+1}^\kappa) - (k_t^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot x_t^\kappa)}{k_t^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot x_t^\kappa} \\ g^y &= \frac{k_{t+1}^\alpha \cdot A_{t+1}^\beta \cdot x_{t+1}^\kappa}{k_t^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot x_t^\kappa} - 1\end{aligned}$$

Vi ved, at modellen har en steady state i z hvorfor produktionsfunktionen kan omskrives til:

$$\begin{aligned}\frac{y_t}{y^\alpha} &= \frac{k_t^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot x_t^\kappa}{y^\alpha} \\ y_t^{1-\alpha} &= z_t^\alpha A_t^\beta x_t^\kappa \\ y_t &= z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}} x_t^{\frac{\kappa}{1-\alpha}} \\ y_t &= z_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} x_t^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \quad \text{fordi } \alpha + \beta + \kappa = 1\end{aligned}$$

Da vi er i steady state har vi da, at:

$$\begin{aligned}g^y &= \frac{z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_{t+1}^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} x_{t+1}^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}}{z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} x_t^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}} - 1 \\ &= \frac{A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+g)^{\frac{t \cdot \beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{X}{(1+n)^t \cdot L_t} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}}{A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} x_t^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}} - 1 \\ &= \frac{A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+g)^{\frac{t \cdot \beta}{\beta+\kappa}} \cdot x_t^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{1}{(1+n)^t} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}}{A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} x_t^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}} - 1 \\ &= (1+g)^{\frac{t \cdot \beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{1}{(1+n)} \right]^{\frac{t \cdot \kappa}{\beta+\kappa}} - 1\end{aligned}$$

Som er det ønskede. Det er klart, at udtrykket er approksimativt lig det bogen finder i (14), da:

$$g^y = \frac{t \cdot \beta}{\beta + \kappa} \ln(1 + g) + \frac{t \cdot \kappa}{\beta + \kappa} \cdot [\ln(1) - \ln(1 + n)] - \ln(1)$$

$$g^y \approx \frac{t \cdot \beta}{\beta + \kappa} \cdot g - \frac{t \cdot \kappa}{\beta + \kappa} \cdot n \quad \text{hvor approksimationen kommer i spil ved logaritmerne}$$

1.2

Den balancerede vækststi for indkomsten per arbejder er givet ved:

$$\begin{aligned} y_t &= z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \left[\frac{X}{L_t} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \\ &= z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot [A_0 \cdot (1+g)^t]^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{X}{(1+n)^t L_0} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \\ &= z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+g)^{\frac{t \cdot \beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{X}{L_0} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1+n)^{\frac{-t \cdot \kappa}{\beta+\kappa}} \end{aligned}$$

Fordi der er kompetitive faktormarkeder, ved vi, at reallønnen er givet ved:

$$\begin{aligned} MPL &= \beta \cdot K_t^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot L_t^{\beta-1} X^\kappa \\ &= \beta \cdot [k_t \cdot L_t]^\alpha \cdot A_t^\beta \cdot L_t^{\beta-1} \cdot (x_t \cdot L_t)^\kappa \\ &= \beta \cdot k_t^\alpha A_t^\beta \cdot L_t^{\alpha+\beta+\kappa-1} x_t^\kappa \\ &= \beta \cdot y_t \end{aligned}$$

Da β er en konstant, er det hermed vist, at reallønnen vokser med samme hastighed, skaleret med elasticiteten af arbejdskraft. Det må nu rent definatorisk gælde, at kapital per arbejder vokser med samme hastighed som den samlede indkomst, idet der indfinder sig en steady state, hvor kapital indkomstforholdet er konstant. Realrenten er lig:

$$\begin{aligned} MPK &= \alpha \cdot K_t^{\alpha-1} A_t^\beta L_t^\beta X^\kappa \\ &= \alpha \cdot \frac{Y_t}{K_t} \\ &= \alpha \cdot z_t \end{aligned}$$

Men idet kapitalens andel af den samlede indkomst konvergerer mod en st. st. værdi må realrenten være konstant. Landens aflønning er:

$$v_t = \frac{\partial Y_t}{\partial X} = \kappa \cdot K_t^\alpha \cdot (A_t L_t)^\beta \cdot X^{\kappa-1} = \kappa \cdot \frac{Y_t}{X}$$

Og fordi X ikke vokser, vokser landens aflønning med samme hastighed som den samlede indkomst Y_t . Så snart $n > 0$ vil vi jf. resultatet fra opgave 1.1 have et *growth drag* i væksten per arbejder, der

vil gøre væksten mindre end den samlede vækst i produktionen.

1.3

Hvis $g = 0$ og $n > 0$, vil indkomsten per arbejder være faldende, realrenten vil falde til et permanent lavere niveau, mens lønningerne også vil være faldende (der er lige pludselig et binding land constraint, dvs. vi er i *Malthus land*). Den samlede økonomi vil dog stadigvæk vokse, da der er flere arbejdere (omend langsommere, end hvis der er teknologisk vækst). Hvis der eksisterer et fast antal af personer, der ejer landet vil deres aflønning dermed stige, mens arbejderne får en gennemsnitlig lavere aflønning. Det gælder, da:

$$\begin{aligned} Y_t &= \left[z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+g)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot (1+n)^{\frac{-t\cdot\kappa}{\beta+\kappa}} \right] \cdot L_0 \cdot (1+n)^t \\ &= z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+g)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot L_0 \cdot (1+n)^{\frac{-t\cdot\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot (1+n)^t \\ &= z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot L_0 \cdot (1+g)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+n)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \\ &= \left[z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left(\frac{X}{L_0}\right)^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \cdot L_0 \right] \cdot (1+g)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1+n)^{\frac{t\cdot\beta}{\beta+\kappa}} \end{aligned}$$

Hvor det første led er en konstant, og den samlede indkomst da afhænger positivt af n .

Opgave 2

Vi betragter nu Solowmodellen i kontinuert tid. Det vil sige:

$$Y = K^\alpha (AL)^\beta X^\kappa \quad (1)$$

$$\dot{K} = sY - \delta K \quad (2)$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \quad (3)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g \quad (4)$$

2.1

Kapital output forholdet er:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{L} &= \frac{K^\alpha (AL)^\beta X^\kappa}{L} \\ &= k^\alpha A^\beta x^\kappa \quad \text{fordi vi kan dividere op i alle led, da produktionsfunktionen er homogen af grad 1} \end{aligned}$$

Alternativt havde vi haft:

$$\begin{aligned}
 \frac{Y}{L} &= K^\alpha A^\beta L^\beta X^\kappa \cdot L^{-1} \\
 &= k^\alpha L^\alpha A^\beta L^{\beta-1} x^\kappa L^\kappa \\
 &= k^\alpha A^\beta x^\kappa L^{\beta+\kappa+\alpha-1} \\
 &= k^\alpha A^\beta x^\kappa L^{1-1} \\
 &= k^\alpha A^\beta x^\kappa
 \end{aligned}$$

Kapital/output-forholdet er:

$$z = \frac{k}{k^\alpha A^\beta x^\kappa} = k^{1-\alpha} A^{-\beta} x^{-\kappa}$$

Som ønsket.

2.2

Vi starter med at tage logaritmen til z og herefter differentiere med hensyn til tid. Altså:

$$\begin{aligned}
 \ln(z) &= (1 - \alpha) \cdot \ln(k) - \beta \cdot \ln(A) - \kappa \ln(x) \\
 \frac{d}{dt} \ln(z) &= (1 - \alpha) \cdot \frac{d}{dt} \ln(k) - \beta \cdot \frac{d}{dt} \ln(A) - \kappa \cdot \frac{d}{dt} \ln(x) \\
 \frac{\dot{z}}{z} &= (1 - \alpha) \cdot \frac{\dot{k}}{k} - \beta \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \kappa \cdot \frac{\dot{x}}{x} \\
 &= (\beta + \kappa) \cdot \frac{\dot{k}}{k} - \beta \cdot g - \kappa \cdot \frac{\dot{x}}{x}
 \end{aligned}$$

Vi har nu fra kapitalakkumulationsligningen, at:

$$\begin{aligned}
 \dot{K} &= sY - \delta K \\
 \dot{k} &= sy - \delta k \\
 \frac{\dot{k}}{k} &= \frac{sy}{k} - \delta \\
 &= s \cdot k^{\alpha-1} A^\beta x^\kappa - \delta
 \end{aligned}$$

Som bliver til:

$$\begin{aligned}
 &= (\beta + \kappa) \cdot \left[s \cdot k^{\alpha-1} A^\beta x^\kappa - (\delta + n) \right] - \beta \cdot g - \kappa \cdot \frac{\dot{x}}{x} \\
 &= (\beta + \kappa) \cdot \frac{s}{z} - (\beta + \kappa)(\delta + n) - \beta \cdot g - \kappa \cdot \frac{\dot{x}}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\beta + \kappa) \cdot \frac{s}{z} - [\beta\delta + \beta n + \kappa\delta + \kappa n + \beta g - \kappa n] \\
&= (\beta + \kappa) \cdot \frac{s}{z} - [\beta\delta + \kappa\delta + \beta n + \beta g] \\
\dot{z} &= (\beta + \kappa) \cdot s - \lambda z
\end{aligned}$$

2.3

I st. st. er væksten i kapital/output forholdet 0. Altså:

$$\begin{aligned}
\lambda z^* &= (\beta + \kappa)s \\
z^* &= \frac{(\beta + \kappa)s}{\lambda} \\
&= \frac{(\beta + \kappa)s}{(\beta + \kappa)\delta + \beta(n + g)} \\
&= \frac{s}{\delta + \frac{\beta}{\beta + \kappa}(n + g)}
\end{aligned}$$

Vi ser ud fra udtrykket for $\dot{z}$, at væksten er aftagende i z , hvorfor st. st. ender med at indfinde sig.

2.4

Vi omskrev den samlede produktion per arbejder til:

$$\begin{aligned}
y &= z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot x^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} \\
&= \left[\frac{s}{\delta + \frac{\beta}{\beta+\kappa}(n + g)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot x^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}}
\end{aligned}$$

Vi ved, at væksten i det første led er 0, og har nu:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{y}}{y} &= \frac{\beta}{\beta + \kappa} \cdot \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\kappa}{\beta + \kappa} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \\
&= \frac{\beta \cdot g}{\beta + \kappa} + \frac{\kappa \cdot (-n)}{\beta + \kappa} = \frac{\beta \cdot g - \kappa n}{\beta + \kappa}
\end{aligned}$$

Opgave 3

Den balancerede vækststi for forbrug per arbejder er givet ved:

$$c_t = \left[z_*^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_0^{\frac{\beta}{\beta+\kappa}} \cdot (1 + g)^{\frac{t \cdot \beta}{\beta+\kappa}} \cdot \left[\frac{X}{L_0} \right]^{\frac{\kappa}{\beta+\kappa}} (1 + n)^{\frac{-t \cdot \kappa}{\beta+\kappa}} \right] \cdot (1 - s)$$

Vi tager logaritmer og fjerner alt, der ikke afhænger af s :

$$\ln(c_t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s) + \ln(1-s) \quad \text{idet } z_* = \frac{s}{(1+n)(1+g)^{\beta/(\beta+\kappa)} - (1-\delta)}$$

$$\frac{\delta c_t}{\delta s} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

Fordi vi maksimerer opsparingen, og kapitalen er *bundet* af fast land, skal vi tilføje $-\kappa$ i elasticiteten af opsparing. Vi sætter lig 0:

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha-\kappa) \cdot s} = \frac{1}{1-s}$$

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)} = \frac{s}{1-s}$$

$$s^* = \frac{\alpha}{1-\kappa}$$

Den optimale opsparing er altså ved et højere niveau, fordi der er stærkere aftagende marginalprodukt af kapital (pga. en fast andel land).