

En gennemgang af pensum i Mikroøkonomi I

Levi van Boekel [†]

18. december 2024

Alene udgivet på vanboekel.dk

[†] Tredje semesters studerende ved Københavns Universitet

Ansvarsfraskrivelse

Pensumgennemgangen har ingen forbindelse med Københavns Universitet og skal ikke se som en fuldstændig beskrivelse af alle koncepter i kurset. I stedet er det *en* gennemgang af kurset, som jeg finder naturlig. Fejl kan forekomme, og du opfordres til at skrive på levi@vanboekel.dk, hvis de er af graverende karakter.

Ophavsret

Alt indhold og materiale, herunder tekst, billeder, grafik, og data, der er udarbejdet og præsenteret i denne sammenhæng, er beskyttet af ophavsretsloven. Enhver kopiering, distribution, offentliggørelse eller anden brug af materialet uden forudgående skriftlig tilladelse fra mig er forbudt og vil føre til retlige konsekvenser.

Kolofon

Layoutet er i KOMA-Script med L^AT_EX ved at bruge [kaobook](#) og [Overleaf](#).

Forlag

Pensumgennemgangen fines endnu ikke i trykt format, og kan derfor kun tilgås online [her](#)

It is not from the benevolence of the butcher, the brewer, or the baker, that we expect our dinner, but from their regard to their own interest.

– Adam Smith

Forord

De følgende noter har til formål, at gennemgå kernepensum i **Mikroøkonomi I**. Noten følger kursets opbygning, og starter med at se nærmere på forbrugerens på et marked. Herefter udledes producentens udbud, hvilket leder til en analyse af *partiel* ligevægt. Afsluttende ser vi to eksempler på en *generel* ligevægt i form af hhv. bytte- og Koopmans-økonomi.

Levi van Boekel

Indhold

Forord	v
Indhold	vii
FORBRUGEREN	1
1 Basal forbrugerteori	3
1.1 Budgetmængden	3
1.2 Præferencer, nyttefunktioner og indifferenskurver	4
1.3 Nyttmaksimering	5
1.4 Nogle eksempler	6
1.4.1 Cobb-Douglas præferencer	6
1.4.2 Kvasilineære præferencer	8
1.4.3 Additive præferencer	9
1.4.4 Komplementer	11
1.4.5 Substitutter	11
1.4.6 Konkave præferencer	12
1.5 Afslørede præferencer	14
1.5.1 WARP	14
1.5.2 SARP	14
2 Forbrugeren på et marked	15
2.1 Nogle grafiske repræsentationer	15
2.2 Giffengoder	16
2.3 Substitutions- og indkomsteffekter	17
2.3.1 Slutsky dekomponering (eksogen indkomst)	18
2.3.2 Hicks dekomponering (eksogen indkomst)	19
2.3.3 Slutsky dekomponering (endogen indkomst)	20
2.4 Forbrugeroverskud	23
2.4.1 EV og CV	24
2.5 Beslutninger over tid	25
2.6 Usikkerhed	27
2.7 Ligevægt	29
2.7.1 Skatter	30
2.7.2 Elasticitet	32
PRODUCENTEN	35
3 Udbud	37
3.1 Profitmaksimering	37
3.1.1 Returns to scale	37
3.1.2 Kort sigt	37
3.1.3 Lang sigt	39
3.1.4 Afsløret profitabilitet (WAPM)	40

3.2	Omkostningsminimering	41
3.2.1	Kort sigt	41
3.2.2	Lang sigt	42
3.2.3	Afsløret omkostningsminimering	42
3.2.4	Sammenhæng til profitmaksimering	43
3.3	Forskellige kurver	46
3.4	Producentoverskud	48
3.5	Antal virksomheder	50
GENEREL LIGEVÆGT		53
4	Bytteøkonomi	55
4.0.1	Grafisk repræsentation	55
4.0.2	Ligevægt	56
4.0.3	Det første velfærdsteorem	60
4.0.4	Det andet velfærdsteorem	60
5	Produktionsøkonomi	61
5.0.1	Koopmans-økonomi	61
5.1	Velfærdsteoremer	69
5.1.1	Det første velfærdsteorem	69
5.1.2	Det andet velfærdsteorem	70
5.2	Generalisering	70
Litteratur		71

FORBRUGEREN

Basal forbrugerteori

1

1.1 Budgetmængden

Vi har i løbet af kurset beskrevet forbrugeren på et marked for to goder. Her er det klart, at forbruger står overfor en budgetbetingelse, der tilsiger, at han maksimalt kan bruge den indkomst, m , han har. Det skriver vi som:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m \quad (1.1)$$

Hvor en forbruger med monotone præferencer altid vil bruge hele sin indkomst. Med udgangspunkt i ovenstående definerer vi budgetlinjen:

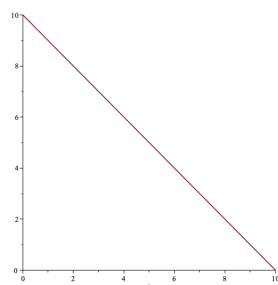
Sætning 1.1.1 *Lad en forbruger stå overfor varerne x_1, x_2 , med tilhørende priser p_1, p_2 og en eksogen indkomst, m . Definér da hans budgetlinje som den linje, hvorom det gælder, at varekombinationerne koster nøjagtigt m ;*

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m \iff x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \quad (1.2)$$

Budgetlinjen tegnes altid i et $x_1 - x_2$ diagram, hvor hældningen er $-\frac{p_1}{p_2}$. Skæringen med andenaksen er givet ved $x_2 = \frac{m}{p_2}$, mens skæringen med førsteaksen er givet ved $x_1 = \frac{m}{p_1}$. Bemærk, at:

- En stigning i m vil forskyde budgetlinjen udad.
- En stigning i p_1 vil gøre hældningen af budgetlinjen stejlere og forskyde skæringen med førsteaksen indad (skæringen med andenaksen er uændret).
- Et fald i p_1 vil gøre hældningen af budgetlinjen mindre stejl og forskyde skæringen med førsteaksen udad (skæringen med andenaksen er uændret).
- En stigning i p_2 vil gøre hældningen af budgetlinjen fladere og forskyde skæringen med andenaksen nedad (skæringen med førsteaksen er uændret).
- Et fald i p_2 vil gøre hældningen af budgetlinjen stejlere og forskyde skæringen med andenaksen opad (skæringen med førsteaksen er uændret).

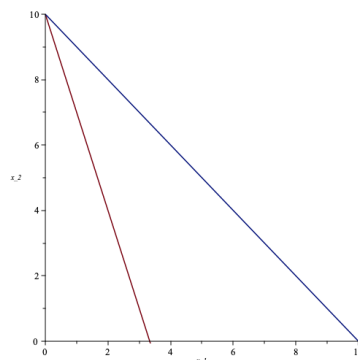
Vi illustrerer en budgetlinje for priserne $p_2 = 1, p_1 = 1$ og indkomsten $m = 10$ nedenfor:



1.1	Budgetmængden	3
1.2	Præferencer, nyttefunktioner og indifferenskurver	4
1.3	Nyttemaksimering	5
1.4	Nogle eksempler	6
1.4.1	Cobb-Douglas præferencer	6
1.4.2	Kvasilineære præferencer	8
1.4.3	Additive præferencer	9
1.4.4	Komplementær	11
1.4.5	Substitutter	11
1.4.6	Konkave præferencer	12
1.5	Afslørede præferencer	14
1.5.1	WARP	14
1.5.2	SARP	14

Figur 1.1: Illustration af budgetmængde

Bemærk, at hældningen af budgetmængde her er givet ved -1 , svarende til, at man skal opgive en enhed x_2 for at få en enhed mere af x_1 på markedet. Det følger heraf helt naturligt, at hældningen bliver stejlere, hvis prisen på x_1 stiger, da man her (for uændret p_2) skal opgive flere enheder af x_2 for at få en enhed x_1 . Vi illustrer en prisstigning til $p_1 = 3$ nedenfor:



Figur 1.2: Komparativ statik

Omvendt vil en stigning i p_2 gøre budgetlinjen fladere, fordi man her skal opgive færre enheder af den nu dyrere x_2 .

1.2 Præferencer, nyttefunktioner og indifferenskurver

Vi beskriver forbrugerens rangordning mellem goder gennem nyttefunktioner, der har til formål at afspejle en forbrugers bagvedliggende præferencer. Det gælder således, rent definitorisk, at nytte er et ordinalt begreb, der ikke siger noget om niveauer, men snarere rangordningen af forbrugsbundter imellem. Det er bl.a. årsagen til, at vi kan transformere nyttefunktioner vha. strengt voksende transformationer.

Notationsmæssigt bruges $>$ til at indikere, at et forbrugsbundt er strengt foretrukket for et andet, mens $\geq$ bruges til at indikere, at et forbrugsbundt er mindst lige så godt som et andet. Hvis to forbrugsbundter er lige gode, siger vi, at forbrugeren er indifferent og skriver $\sim$. Relationerne er indbyrdes afhængige, hvorfor f.eks. $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$, samt $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ medfører, at $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$. I kurset har vi desuden antaget de følgende tre aksiomer om præferencer.

Sætning 1.2.1 Vi antager generelt, at:

1. Præferencer er komplette, dvs. alle varebundter kan sammenlignes.
2. Præferencer er reflektive, dvs. ethvert varebundt er mindst lige så godt som sig selv, $(x_1, x_2) \geq (x_1, x_2)$.
3. Præferencer er transitive, dvs. hvis $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$ og $(y_1, y_2) > (z_1, z_2)$, så gælder det, at $(x_1, x_2) > (z_1, z_2)$.¹

1: Det følger heraf, at indifferenskurver ikke kan krydse.

En nyttefunktion defineres nu som en vilkårlig funktion af to variable, $u(\cdot)$, der opfylder ovenstående aksiomer. Niveaukurven af en nyttefunktion benævnes for en indifferenskurve, og beskriver dermed alle mulige kombinationer af varebundterne, hvor nytten er konstant. Det viser sig,

at hældningen af indifferenskurven spiller en afgørende rolle for senere analyse, hvorfor vi definerer:

Sætning 1.2.2 Hældningen af en niveaukurven benævnes MRS, og angiver i hvilket forhold forbrugeren vil bytte varerne med hinanden. Det findes ved:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \quad (1.3)$$

hvor u angiver en vilkårlig nyttefunktion.

1.3 Nyttmaksimering

Når vi betragter en forbruger med givne præferencer og vi er interesseret i at hans finde hans *optimal choice*, givet priser og eksogen indkomst, står vi overfor følgende maksimeringsproblem:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m \quad (1.4)$$

Den nemmeste (eller måske nærmere, mest generelle) måde at løse et sådant problem er ved Lagrange. For at vi metoden kan bruges, skal vi dog være sikre på, at funktionen er konveks (da det kritiske punkt ellers ikke nødvendigvis er et optimum), samt at præferencerne er monotone (da vi ellers ikke kan være sikre på, at forbrugeren bruger hele sin indkomst). Det kan tjekkes ved:

Sætning 1.3.1 Lad $u(x_1, x_2)$ være en vilkårlig nyttefunktion, da gælder det, at:

Nyttefunktionen er strengt konveks, hvis alle linearkombinationer langs indifferenskurven ligger i det indre af den øvre konturmængde. Hvis de blot ligger i den øvre konturmængde, er fkt. konveks.

Nyttefunktionen beskriver monotone præferencer, hvis alle punter nord-øst for et givent punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde.

Hvis begge dele er opfyldt vil en indre løsning kunne findes ved at løse nedenstående maksimeringsproblem vha. Lagrange:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \quad (1.5)$$

Bemærk desuden, at en indre løsning altid vil være karakteriseret ved $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, såfremt præferencerne er monotone og differentiable.

Idet Lagrange kun finder indre løsninger skal vi dog altid tjekke, om der kan opstå randløsninger. Dette gøres ved at tjekke for *essentialitet* jf. nedenstående:

Sætning 1.3.2 Lad $u(x_1, x_2)$ være en vilkårlig nyttefunktion, da gælder det, at:

x_1 er essentiel (ingen randløsninger i $x_1 = 0$), hvis:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} MRS \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

svarende til, at man er villig til at opgive uendelig meget af x_2 for at få en enhed mere af x_1 , hvis man har asymptotisk 0 af x_1 .

x_2 er essentiel (ingen randløsninger i $x_2 = 0$), hvis:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} MRS \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

svarende til, at man er villig til at opgive intet af x_2 for at få en enhed mere af x_1 , hvis man har asymptotisk uendelig meget af x_1 .

1.4 Nogle eksempler

De forgående afsnit har gennemgået de basale værktøjer man skal bruge til at analysere en forbrugers indifferenskurver, samt den nyttemaksimerende efterspørgsel efter de to varer. I det følgende anvendes metoderne på de mest gængse nyttefunktioner.

1.4.1 Cobb-Douglas præferencer

CD præferencer repræsenteres matematisk ved:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^b \quad (1.8)$$

Idet den naturlige logaritme er monotont voksende er det ækvivalent med:

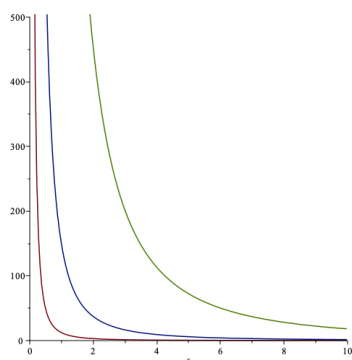
$$\ln u(x_1, x_2) = a \cdot \ln x_1 + b \ln x_2 \quad (1.9)$$

So er lettere at regne med og derfor vil blive brugt. Det generelle maksimeringsproblem bliver da:

$$\max_{x_1, x_2} a \cdot \ln x_1 + b \ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m \quad (1.10)$$

Vi tjekker nu, om præferencerne er (strengt) konvekse, samt, hvorvidt de udviser monotonsitet, idet begge dele er et krav før vi kan bruge Lagrange til at finde en indre løsning. Indifferenskurverne har formen:

$$\begin{aligned} u &= a \cdot \ln x_1 + b \ln x_2 \\ \ln x_2 &= \frac{u}{b} - \frac{a}{b} \cdot \ln x_1 \\ x_2 &= e^{\frac{u}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (1.11)$$



Figur 1.3: Indifferenskurver for $a = 1$, $b = 2$, $u = 5, 10, 15$

Som er skitseret i til venstre.

Vi ser klart, at linearkombinationer af to punkter på indifferenskurven ligger i det indre af den øvre konturmængde, hvorfor præferencerne er

strengt konvekse. Vi ser desuden, at alle punkter nord-øst for et givet punkt på indifferenskurven ligger i det indre af den øvre konturmængde, hvorfor præferencerne er strengt monotone og vi kan erstatte $\leq$ med $=$. Vi kan desuden grafisk se, at hældningen af niveaukurven går mod uendelig, når $x_1 \rightarrow 0$, samt at den går mod 0, når $x_2 \rightarrow 0$, hvorfor der er essentialitet i begge ender og der dermed ikke forekommer randløsninger. Vi ved altså, at vores maksimeringsproblem kan omskrives til:

$$\max_{x_1, x_2} a \cdot \ln x_1 + b \ln x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \quad (1.12)$$

Hvor vi finder de *eneste* løsninger til forbrugerens problem. Vi opskriver Lagrange:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = a \cdot \ln x_1 + b \ln x_2 + \lambda(m - x_1 p_1 - x_2 p_2) \quad (1.13)$$

Som leder til følgende FOC:

$$\frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{b}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (1.15)$$

$$m - x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0 \quad (1.16)$$

Vi dividerer den første med den anden:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x_1} \cdot \frac{x_2}{b} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \frac{1}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{b}{x_2} \cdot \frac{1}{a} \\ x_1 &= \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{x_2}{b} \cdot a \end{aligned} \quad (1.17)$$

Vi indsætter nu (1.17) i bibetingelsen:

$$\begin{aligned} \left[\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{x_2}{b} \cdot a \right] p_1 + x_2 p_2 &= m \\ \frac{p_2 x_2 a}{b} + x_2 p_2 &= m \\ p_2 x_2 a + x_2 p_2 b &= m b \\ x_2 (p_2 a + p_2 b) &= m b \\ x_2^* &= \frac{m}{p_2} \cdot \frac{b}{(a+b)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

For at finde det optimale forbrug af x_1 sætter vi svaret tilbage ind i (1.17):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\left[\frac{m}{p_2} \cdot \frac{b}{(a+b)} \right]}{b} \cdot a \\ x_1^* &= \frac{m}{p_1} \cdot \frac{a}{(a+b)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Forbrugerens optimal choice er da ²:

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{m}{p_1} \cdot \frac{a}{(a+b)}, \frac{m}{p_2} \cdot \frac{b}{(a+b)} \right] \quad (1.20)$$

2: Vi ser altså, at CD præferencer altid giver anledning til, at en fast andel af budgettet bruges på de respektive varer.

1.4.2 Kvasilineære præferencer

Kvasilineære præferencer er en type præferencer, hvor forbrugers nytte er lineær i det ene gode og IKKE lineært i det andet, hvilket i praksis vil sige, at forbrugeren - for en lav indkomst — vil foretrække store mængder af det ikke lineære gode, men herefter allokerer resten af sit forbrug stærkere overmod det lineære gode. Det gælder derfor, at der er ingen indkomsteffekt i det ikke-lineære gode. Der vil desuden ALTID være randløsninger i lineære gode for kvasilineære præferencer. Desuden vil indifferenskurverne være paralleltforskudte opad, idet forbruget af det ikke-lineære gode ikke forbliver konstant efter et givet niveau. Kvasilineære præferencer er da af formen:

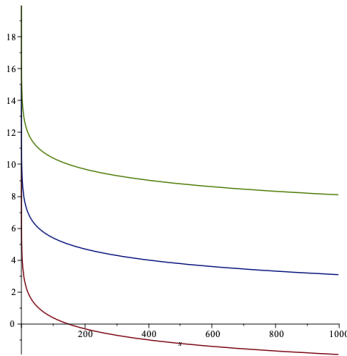
$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2 \quad (1.21)$$

hvor x_1 er det ikke lineære gode. Vi gennemgår et eksempel nedenfor, hvor vi betragter den funktionelle form:

$$u(x_1, x_2) = 3 \ln x_1 + x_2 \quad (1.22)$$

Vi tjekker igen for konveksitet, monotonitet, samt randløsninger ved at tegne indifferenskurverne. De er af formen:

$$\begin{aligned} u &= 3 \ln x_1 + x_2 \\ x_2 &= u - 3 \ln x_1 \end{aligned} \quad (1.23)$$



Figur 1.4: Indifferenskurver for $u = 5, 10, 15$

Og er vist til venstre.

Vi ser, at præferencer er strengt konvekse, idet linearkombinationer af to punkter på kurven ligger i det indre af den øvre konturmængde, samtidig med, at præferencerne er monotone, idet alle punkter nord-øst for et punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde. Afsluttende ser vi, at der er en randløsning i $x_2 = 0$, idet der her er en skæring med akse (dvs. $x_2 \rightarrow 0$ medfører ikke, at hældningen går mod 0, som er kravet). Omvendt er ingen randløsning i $x_1 = 0$, da vi ser, at hældningen går mod uendelig, når $x_1 \rightarrow 0$. Vi kan nu opstille problemet via Lagrange, hvor vi dog kun finder de *indre* løsninger:

$$\max_{x_1, x_2} 3 \ln x_1 + x_2 \quad \text{u.b.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (1.24)$$

Hvor = følger af, at præferencerne er monotone. Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 3 \ln x_1 + x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) \quad (1.25)$$

Med FOC:

$$\frac{3}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$1 - \lambda p_2 = 0 \quad (1.27)$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (1.28)$$

Vi dividerer den første med den anden:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_1^* &= \frac{3p_2}{p_1}\end{aligned}\quad (1.29)$$

Vi indsætter tilbage i budgetbegrænsningen:

$$\begin{aligned}3p_2 + x_2p_2 &= m \\ x_2p_2 &= m - 3p_2 \\ x_2^* &= \frac{m}{p_2} - 3\end{aligned}\quad (1.30)$$

Vi husker dog, at der kunne opstå randløsninger i $x_2 = 0$. Vi tjekker defor, hvad der skal gælde for, at efterspørgslen fundet i (1.30) er positiv:

$$\frac{m}{p_2} - 3 > 0 \quad (1.31)$$

$$m > 3p_2 \quad (1.32)$$

Da bliver efterspørgslen:

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } m \leq 3p_2 \\ \left[\frac{3p_2}{p_1}, \frac{m}{p_2} - 3 \right] & \text{ellers} \end{cases} \quad (1.33)$$

I dette tilfælde har vi altså en situation, hvor forbrugers efterspørgsel efter det kvasilineære gode dominerer indtil $m > 3p_2$, hvor alt yderligere indkomst går til det lineære gode.

1.4.3 Additive præferencer

Additive præferencer er en præferencerelation, hvorom der ikke altid gælder generelle regler. De har formen:

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (1.34)$$

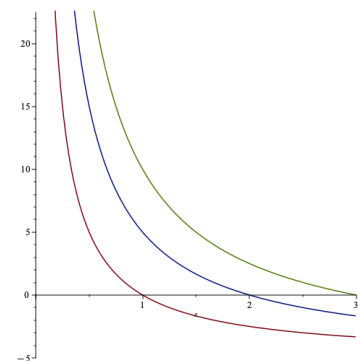
Montont transformerede præferencer er dermed også additive, og komplementer ligeså, men det åbner også op for præferencerelationer, som ikke er gængse. Vi gennemgår følgende præferencerelation:

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 5x_1 \quad (1.35)$$

Vi tjekker indledningsvist om præferencerne er (strengt) konvekse, monotone og om der er essentialitet i begge varer. Hertil tegnes indifferenskurven:

$$\begin{aligned}u &= x_1 \cdot x_2 + 5x_1 \\ x_1x_2 &= u - 5x_1 \\ x_2 &= \frac{u}{x_1} - 5\end{aligned}\quad (1.36)$$

Som er tegnet til højre.



Figur 1.5: Indifferenskurver for $u = 5, 10, 15$

Vi ser, at præferencerne er strengt konvekse, idet linearkombinationer af punkter på den samme indifferenskurve ligger i det indre af den øvre konturmængde, mens præferencerne ligeledes er monotone, idet alle punkter nord-øst for et givet punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde. Vi ser samtidig, at hældningen af niveaukurven $\rightarrow \infty$, når $x_1 \rightarrow 0$, hvorfor der er essentialitet i x_1 . Omvendt ser vi, at hældningen ikke går mod 0, når $x_2 \rightarrow 0$, hvorfor der kan være randløsninger i $x_2 = 0$. Vi kan da opskrive maksimeringsproblemet som følger, hvor vi finder de *indre* løsninger:

$$\max_{x_1, x_2} x_1 \cdot x_2 + 5x_1 \quad \text{u.b.b.} \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \quad (1.37)$$

Lagrange bliver:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 5x_1 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) \quad (1.38)$$

Hvorfor FOC er:

$$x_2 + 5 - \lambda p_1 = 0 \quad (1.39)$$

$$x_1 - \lambda p_2 = 0 \quad (1.40)$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (1.41)$$

Vi dividerer den første med den anden:

$$\begin{aligned} \frac{x_2 + 5}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_2 + 5 &= \frac{p_1 x_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{p_1 x_1}{p_2} - 5 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Og indsætter i bibetingelsen:

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_1 x_1 - 5p_2 &= m \\ 2p_1 x_1 &= m + 5p_2 \\ x_1^* &= \frac{m + 5p_2}{2p_1} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Da bliver efterspørgslen efter x_2 :

$$\begin{aligned} x_2^* &= \frac{p_1 \left[\frac{m + 5p_2}{2p_1} \right]}{p_2} - 5 \\ &= \frac{\frac{m + 5p_2}{2}}{p_2} - 5 \\ &= \frac{m + 5p_2}{2p_2} - 5 \\ &= \frac{m + 5p_2 - 10p_2}{2p_2} \\ &= \frac{m - 5p_2}{2p_2} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Hvor vi dog bemærker, at der som bekendt var randløsninger i $x_2 = 0$,

hvorfor vi skal tjekke:

$$\frac{m - 5p_2}{2p_2} > 0 \quad (1.45)$$

$$m - 5p_2 > 0 \quad (1.46)$$

$$m > 5p_2 \quad (1.47)$$

Dvs. indkomsten skal være større end 5 gange prisen på vare 2, før der forbruges noget af vare 2. Da bliver den samlede efterspørgsel:

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } m \leq 5p_2 \\ \left[\frac{m+5p_2}{2p_1}, \frac{m-5p_2}{2p_2} \right] & \text{ellers} \end{cases} \quad (1.48)$$

1.4.4 Komplementær

Præferencerelationen for komplementær opstår, når goder skal forbruges i et fast forhold, og et forbrug af en af goderne over dette niveau IKKE giver højere nytte. Sådanne præferencer skrives på formen:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad (1.49)$$

Eller varianter heraf, f.eks.:

$$u(x_1, x_2) = \min\{3x_1, 12x_2\} \quad (1.50)$$

Og så fremdeles. Komplementær er generelt konvekse, idet linearkombinationer af punkter på en indifferenskurve ligger i den indre konturmængde, men ikke monotone, idet mere af den ene vare alene ikke øger nytten. Der kan ikke opstå randløsninger, og MRS er kun defineret til højre for knæpunktet (her 0). For at finde det optimale forbrug skal vi udnytte, at der altid vil gælde, at forbruget efterspørger en mængde, hvor de to argumenter i min er ens. For (1.50) har vi f.eks.

$$3x_1 = 12x_2 \iff x_1 = 4x_2 \quad (1.51)$$

Hvilket vi herefter skal indsætte i budgetbetingelsen:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot 4x_2 + p_2 x_2 &= m \\ x_2(4p_1 + p_2) &= m \\ x_2^* &= \frac{m}{(4p_1 + p_2)} \end{aligned} \quad (1.52)$$

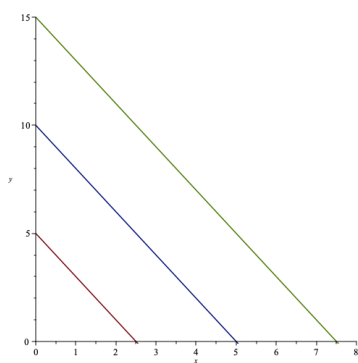
Samt:

$$x_1^* = \frac{m}{p_1 + \frac{1}{4}p_2} \quad (1.53)$$

1.4.5 Substitutter

Substitutter beskriver præferencerelationer, hvor varerne altid kan substitueres i et fast forhold, dvs. MRS er konstant. Sådanne relationer skrives som:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \quad (1.54)$$



Figur 1.6: Indifferenskurver for $u = 5, 10, 15$ samt $a = 2, b = 1$

Hvor a, b er konstanter. Bemærk, at $a = b = 1$ svarer til specialtilfældet, hvor goderne substitueres i forholdet 1:1 (også kendt som *perfekte komplement*). Indifferenskurven kan her fint tegnes og er af formen:

$$\begin{aligned} u &= ax_1 + bx_2 \\ x_2 &= \frac{u - ax_1}{b} \end{aligned} \quad (1.55)$$

hvor $|MRS| = \frac{a}{b}$. Der er skitseret nogle indenfor til venstre.

Vi ser, at præferencerelationen er monoton (alle punkter nordøst for et givent punkt ligger i det indre af den øvre konturmængde), samtidig med, at der gælder konveksitet (linearkombinationer af punkter på kurven ligger i den øvre konturmængde). Vi ser ligeledes, at der kan være randløsninger i begge ender. Optimal choice er i det generelle tilfælde:

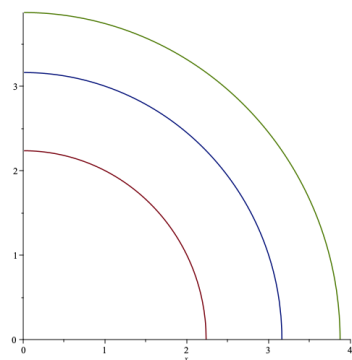
$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } \frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2} \\ \text{alle punkter, der opfylder betingelsen} & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} = \frac{a}{b} \\ \left[0, \frac{m}{p_2} \right] & \text{hvis } \frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad (1.56)$$

Hvis vi altså f.eks. betragter præferencerne af formen:

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \quad (1.57)$$

Har vi:

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} < 2 \\ \text{alle punkter, der opfylder betingelsen} & \text{hvis } \frac{p_1}{p_2} = 2 \\ \left[0, \frac{m}{p_2} \right] & \text{hvis } 2 < \frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad (1.58)$$



Figur 1.7: Indifferenskurver for $u = 5, 10, 15$

1.4.6 Konkave præferencer

Vi kan også have præferencerelationer, der er konkave. Betragt f.eks:

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (1.59)$$

Hvor indifferenskurverne er givet ved:

$$x_2 = \sqrt{u - x_1^2} \quad (1.60)$$

Og er tegnet til venstre.

Vi ser, at præferencerne er monotone (alle punkter nordøst for et givent punkt ligger i det mindre af den øvre konturmængde), mens præferencerne ikke er konvekse, idet linearkombinationer af punkter på en indifferenskurve ikke ligger i den øvre konturmængde. Vi ser desuden, at der er randløsninger i begge ender. Vi starter med at finde de indre løsninger nedenfor, hvor vi kan regne med = i bibetingelsen som følge af monotonisitet. Da:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2) \quad (1.61)$$

FOC:

$$2x_1 - \lambda p_1 = 0 \quad (1.62)$$

$$2x_2 - \lambda p_2 = 0 \quad (1.63)$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (1.64)$$

Vi dividerer den første med den anden:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1.65)$$

$$x_1 = \frac{p_1 x_2}{p_2} \quad (1.66)$$

Vi indsætter tilbage i budgetbetingelsen:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \left[\frac{p_1 x_2}{p_2} \right] + p_2 x_2 &= m \\ \frac{p_1^2 x_2}{p_2} + p_2 x_2 &= m \\ p_1^2 x_2 + p_2^2 x_2 &= p_2 m \\ x_2^* &= \frac{p_2 m}{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Hvor den indre løsning kun gælder, hvis:

$$\frac{p_2 m}{p_1^2 + p_2^2} < 0 \iff p_2 m < 0 \quad (1.68)$$

Hvilket aldrig gælder. På samme måde ved vi, at den indre løsning for x_1^* heller ej. Vi tjekker nu, hvornår den ene randløsning giver større nytte end den anden:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{p_1^2} &> \frac{m^2}{p_2^2} \\ p_2 &> p_1 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Det vil sige, at randløsningen, hvor $x_2 = 0$ er foretrukket, når $p_2 > p_1$. Tilsvarende for:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{p_1^2} &< \frac{m^2}{p_2^2} \\ p_2 &< p_1 \end{aligned} \quad (1.70)$$

her vil randløsningen i $x_1 = 0$ være foretrukket, når $p_1 > p_2$. Da bliver løsningsmængden:

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } p_2 > p_1 \\ \left[0, \frac{m}{p_2} \right] & \text{hvis } p_1 > p_2 \\ \left[\frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2} \right] & \text{hvis } p_1 = p_2 \end{cases} \quad (1.71)$$

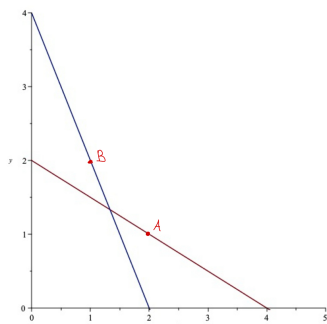
1.5 Afslørede præferencer

Grundtanken bag afslørende præferencer er, at vi observerer en forbruger på mindst to tidspunkter, og at hans valg på begge tidspunkter skal være *konsistente med hinanden*. Det vil sige, at hvis forbrugeren vælger $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$ ved priser, hvor (y_1, y_2) var opnåelig, skal han også vælge (x_1, x_2) ved andre priser, hvor begge dele stadigvæk er opnåelige. Det giver anledning til to aksiomer om afslørede præferencer, WARP og SAPR.

1.5.1 WARP

Det svage aksiom for afslørede præferencer er en måde at sikre, at forbrugers adfærd er konsistent med de tre aksiomer vi opstillede i starten af kurset. Det tilsiger, at:

Sætning 1.5.1 WARP: Hvis $(x_1, x_2) > (y_1, y_2)$, må det ikke ske, at $(y_1, y_2) > (x_1, x_2)$, såfremt begge forbrugsbundter er opnåelige.



Figur 1.8: Budgetlinjer i begge situationer

Nedenstående eksempel illustrerer, hvordan man tjekker betingelsen i praksis. Lad en forbruger efterspørge $(x_1, x_2) = (2, 1)$ ved priserne $(p_1, p_2) = (2, 4)$, samtidig med, at han efterspørger $(x_1, x_2) = (1, 2)$ ved priserne $(p_1, p_2) = (6, 3)$. Vi ser, at det andet forbrugsbundt havde kostet ham $8 + 2 = 10$ på det tidspunkt, hvor han valgte $(2, 1)$ til $4 + 4 = 8$. Det vil altså sige, at han ikke har afsløret, om han foretrækker $(1, 2)$ for $(2, 1)$. På det tidspunkt, hvor han valgte $(1, 2)$ kostede det $6 + 6 = 12$, mens $(2, 1)$ havde kostet $12 + 3 = 15$. Forbrugeren har altså her heller ej tilkendegivet, om han foretrækker $(1, 2)$ for $(2, 1)$. Ovenstående er indtegnet i til venstre, hvor der er budgetlinjer for begge tilfælde, hvor vi ser, at forbrugsbundt A ikke var opnåeligt, da B blev valgt og vice versa.

1.5.2 SARP

Det stærke aksiom er fuldstændig identisk med WARP, blot med den forskel, at der nu også tages hensyn til indirekte foretrukne forbrugsbundter (dvs. gennem transitivitet).

Sætning 1.5.2 SARP: Hvis (x_1, x_2) er direkte eller indirekte foretrukket for (y_1, y_2) , må det ikke ske, at (y_1, y_2) eller direkte eller indirekte foretrukket for (x_1, x_2) , såfremt begge forbrugsbundter er opnåelige.

Vi gennemgår et eksempel. Se nedenstående.

	$p = (2, 1)$	$p' = (1, 1)$
$x = (2, 8)$	12*	10
$x' = (3, 5)$	11	8*
$x'' = (6, 1)$	13	7

Vi kan nu slutte, at $x > x''$, idet $x' > x''$ og $x > x'$ i den første transaktion.

2.1 Nogle grafiske repræsentationer

Når vi har løst forbrugers problem, og står tilbage med Marshall efterspørgslen efter de to varer, dvs:

$$\mathbf{x}^* = \{x_1^*, x_2^*\} \quad (2.1)$$

Kan vi undersøge, hvordan forbrugers optimale valg ændres når pris og indkomst ændres. Hertil er der defineret nogle forskellige kurver.

Indkomstofferkurven findes ved at tegne en linje igennem de optimale forbrugsbundter, når budgetmængden forskydes, udad, dvs. når indkomsten øges. Hvis vi f.eks. har en forbruger med CD præferencer:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} \quad (2.2)$$

Ved vi, at forbrugers Marshall efterspørgsel er:

$$\mathbf{x}^* = \left\{ a \cdot \frac{m}{p_1}, (1-a) \cdot \frac{m}{p_2} \right\} \quad (2.3)$$

Vi kan derfor tegne nogle indifferenskurver, de tilhørende budgetlinjer og sætte punkterne sammen, for at få indkomstofferkurve. Det er gjort til højre.

Hvis indkomstofferkurven er positivt hældende, svarer det til, at begge goder er *normale*, dvs. at deres efterspørgsel afhænger positivt af prisen.

Hvis man blot vil betragte en af goderne separat, kan man ty til *Engels Kurven*, som blot viser, hvordan efterspørgslen efter et af goderne afhænger af prisen. For at tegne den, skal man altså blot have information om Marshall efterspørgslen efter et af goderne, og herefter tegne den som en funktion af x_1 . Altså:

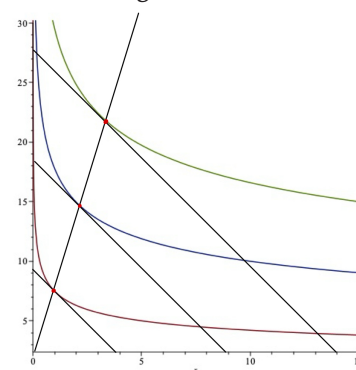
$$\begin{aligned} x_1 &= a \cdot \frac{m}{p_1} \\ x_1 \cdot p_1 &= a \cdot m \\ m &= \frac{x_1 \cdot \bar{p}_1}{a} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ovenstående er tegnet til højre.

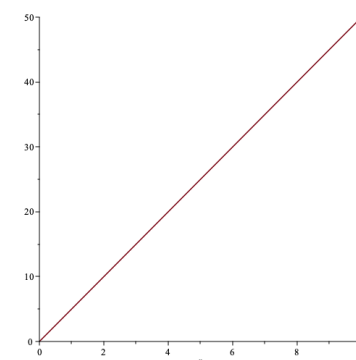
Det gælder desuden, at præference er *homotetiske*, hvis en forøgelse af indkomsten med $t > 0$ leder til, at forbrugsbundtet skaleres med samme størrelse. Det er altid tilfældet, at Engelkurver, der er rette linjer, kommer fra homotetiske præferencer.

Afsluttende kan vi undersøge, hvad der sker med efterspørgslen, når prisen ændrer sig. En sådan kurve kaldes for *egen-pris efterspørgselskurven* og tegnes ved at lade prisen på en vare variere, for fast indkomst og en

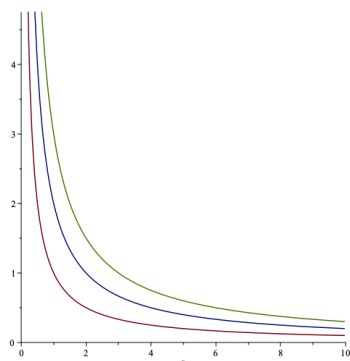
2.1	Nogle grafiske repræsentationer	15
2.2	Giffengoder	16
2.3	Substitutions- og indkomsteffekter	17
2.3.1	Slutsky dekomponering (eksogen indkomst) . . .	18
2.3.2	Hicks dekomponering (eksogen indkomst) . . .	19
2.3.3	Slutsky dekomponering (endogen indkomst) . . .	20
2.4	Forbrugers overskud	23



Figur 2.1: Indkomstofferkurve for $u = 5, 10, 15$ og $a = 0.2$



Figur 2.2: Engelkurven for x_1 ved $a = 0.2$



Figur 2.3: Egen-pris efterspørgselskurven for x_1 ved $\alpha = 0.2$, $m = 5, 10, 15$

fast pris på den anden vare. I vores tilfælde bliver det altså:

$$x_1 = a \cdot \frac{\bar{m}}{p_1} \quad (2.5)$$

Som er tegnet til venstre.

Vi ser, at efterspørgslen er faldende i prisen og vice versa.

2.2 Giffengoder

Der findes tilfælde, hvor efterspørgslen efter et gode stiger, når priserne stiger. Vi gennemgår et sådant eksempel nedenfor, hvor præferencerne er:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1 + 1, 2x_1 + 2x_2\} \quad (2.6)$$

For at tegne indifferenskurverne starter vi med at tjekke, hvornår hvilket af udtrykkene gælder. Altså:

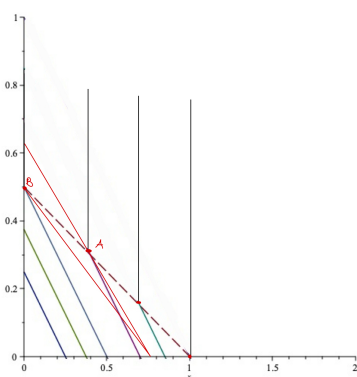
$$\begin{aligned} x_1 + 1 &> 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 1 &> 2x_2 \\ \frac{1 - x_1}{2} &> x_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Indifferenskurverne er altså:

$$x_1 = u - 1 \quad \text{når} \quad \frac{1 - x_1}{2} > x_2 \quad (2.8)$$

Og:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= u \\ u - 2x_1 &= 2x_2 \\ \frac{u}{2} - x_1 &= x_2 \quad \text{når} \quad \frac{1 - x_1}{2} < x_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$



Figur 2.4: Indifferenskurve for (2.6)

Det er tegnet nedenfor, hvor punktet A repræsenterer en forbrugers *optimal choice* i udgangspunktet, givet budgetlinjen.

Vi ser samtidig, at en forøgelse af prisen på x_2 leder til, at vi bevæger os mod punkt B, hvor forbruget er højere. Vi kan altså allerede nu se, at præferencerelationen beskriver et Giffengode (x_2). Vi kan overbevise os selv om det analytisk ved at finde det optimale forbrugsbundt af vare 2. Det må opfylde, at de to udtryk i (2.6) er lig hinanden, hvorfor vi har det

følgende, hvor vi fra budgetbetingelsen har, at $x_1 = \frac{m - x_2 p_2}{p_1}$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{1 - x_1}{2} \\
 x_2 &= \frac{1 - \frac{m - x_2 p_2}{p_1}}{2} \\
 x_2 &= \frac{\frac{-m + x_2 p_2 + p_1}{p_1}}{2} \\
 x_2 &= \frac{-m + x_2 p_2 + p_1}{2p_1} \\
 x_2 2p_1 - x_2 p_2 &= p_1 - m \\
 x_2 &= \frac{p_1 - m}{2p_1 - p_2}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Som vi kan differentiere mht. p_1 og få:

$$\frac{\delta x_2}{\delta p_2} = \frac{(p_1 - m)}{(2p_1 - p_2)^2} > 0 \tag{2.11}$$

For god ordens skyld kan vi også finde efterspørgslen efter vare 1:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{m - x_2 p_2}{p_1} \\
 x_1 &= \frac{m - \left[\frac{p_1 - m}{2p_1 - p_2} \right] p_2}{p_1} \\
 x_1 &= \frac{m - \left[\frac{(p_1 - m)p_2}{2p_1 - p_2} \right]}{p_1} \\
 x_1 &= \frac{m + \left[\frac{-p_1 p_2 + p_2 m}{2p_1 - p_2} \right]}{p_1} \\
 x_1 &= \frac{2p_1 m - p_1 p_2}{(2p_1 - p_2)p_1} \\
 x_1^* &= \frac{2m - p_2}{(2p_1 - p_2)}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Og ser, at x_1 IKKE er et Giffen gode, idet:

$$\frac{\delta x_1}{\delta p_1} = -\frac{2(2m - p_2)}{(2p_1 - p_2)^2} < 0 \tag{2.13}$$

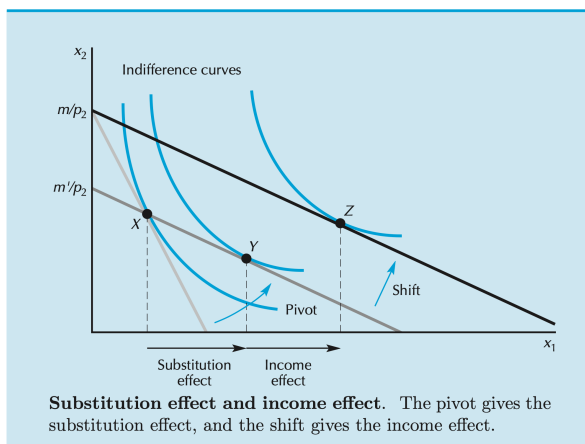
2.3 Substitutions- og indkomsteffekter

Når prisen på en vare ændres (og forbrugerens indkomst er eksogen), kan ændringen dekomponeres til to separate effekter; (1) *substitutions- og indkomsteffekten*. Den første beskriver, at forbrugeren — som følge af en ændring i de relative priser — omfordeler sit forbrug fra den ene til den anden vare, mens indkomsteffekten beskriver, at forbrugeren stilles bedre (dårligere) af et prisfald, idet han kan købe flere (færre) varer i alt, som følge af prisændringen. Vi gennemgår i det følgende to måder, hvorpå man kan opdele de to effekter.

2.3.1 Slutsky dekomponering (eksogen indkomst)

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*

Slutsky dekomponeringen kan lettest illustreres ved nedenstående figur [1]:



Figur 2.5: Illustration af Slutsky dekomponering

Intuitionen er her, at man først pivoterer budgetlinjen og forskyder den nedad (eller opad, ved prisfald) omkring det oprindelige optimum, X, således, at man udelukkende betragter ændringen i efterspørgslen som følge af de nye priser. Det gøres algebraisk ved at betragte forskellen mellem forbruget ved de nye priser og den kompenserende efterspørgsel, og det oprindelige punkt. Altså:

$$\Delta x_1^s = x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m) \quad (2.14)$$

Substitutionseffekten er altid *negativ*, dvs. at den går modsat prisændringen. Indkomsteffekten er nu blot forskellen mellem forbruget ved de nye priser, og den oprindelige indkomst og forbruget ved den kompenserende indkomst, og de nye priser. Altså:

$$\Delta x_1^n = x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m') \quad (2.15)$$

Indkomsteffekten er negativ for inferiorer goder, og positiv for normale varer. Den samlede effekt er summen af de to effekter, og da:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^n \quad (2.16)$$

Som kan skrives som det følgende differentiale, hvor $x_1^m = -x_1^n$:

$$\frac{\delta x_1}{\delta p_1} = \frac{\delta x_1^s}{\delta p_1} - \frac{\delta x_1^m}{\delta m} x_1 \quad (2.17)$$

Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.3.1 Lad en forbruger have nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2 \quad (2.18)$$

Vi ved, at Marshall efterspørgslen er givet ved det følgende, idet der er

tale om CD præferencer med faste forbrugsandele.

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{3}{5} \frac{m}{p_1}, \frac{2}{5} \frac{m}{p_2} \right] \quad (2.19)$$

Det er oplyst, at $m = 100$ og priserne er $(p_1, p_2) = (20, 20)$, som ændres til $(p_1, p_2) = (20, 25)$. Vi starter med at finde den oprindelige efterspørgsel inden prisændringen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \left[\frac{3}{5} \frac{100}{20}, \frac{2}{5} \frac{100}{20} \right] \\ &= [3, 2] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Den kompenserende indkomst bliver da:

$$m' = 20 \cdot 3 + 25 \cdot 5 = 110 \quad (2.21)$$

Hvorfor substitutionseffekten for de to varer er:

$$\Delta x_1^s = x_1(20, 110) - x_1(20, 100) = \frac{3}{5} \frac{110}{20} - 3 = 0.3 \quad (2.22)$$

$$\Delta x_2^s = x_2(25, 110) - x_2(20, 100) = \frac{2}{5} \frac{110}{25} - 2 = -0.24 \quad (2.23)$$

Mens indkomsteffekten bliver:

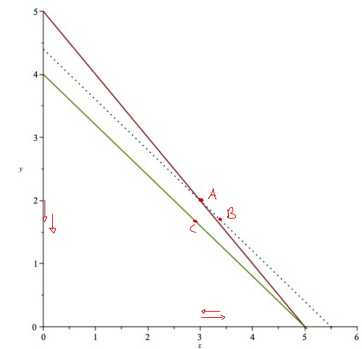
$$\Delta x_1^n = x_1(20, 100) - x_1(20, 110) = 3 - \frac{3}{5} \frac{110}{20} = -0.3 \quad (2.24)$$

$$\Delta x_2^n = x_2(25, 100) - x_2(25, 110) = \frac{2}{5} \frac{100}{25} - \frac{2}{5} \frac{110}{25} = -0.16 \quad (2.25)$$

Den samlede effekt er derfor:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0.3 - 0.3 = 0 \\ \Delta x_2 &= -0.24 - 0.16 = -0.4 \end{aligned}$$

Det er illustreret i figuren til højre.



Figur 2.6: Effekten dekomponeret

Det gælder helt generelt, at Slutsky kompensationen *overkompenserer*, fordi selve kompensationen sker ud fra det samme forbrugsbundt, som (oftest) ikke er sammenfaldende med det optimale forbrugsbundt ved de nye priser.

2.3.2 Hicks dekomponering (eksogen indkomst)

En alternativ måde at kompensere forbrugeren på er via Hicks kompensation, hvor forbrugeren blot skal ligge på den samme indifferenskurve. Her antages det altså, forbrugeren kan substituere i samme periode, hvorfor man kan sige, at *hicks* underkompenserer forbrugeren. Substitutions- og indkomsteffekten er altså fuldstændig identiske udover, at m' nu bliver til m'_u .

$$\Delta x_1^s = x_1(m'_u, p'_1) - x_1(m, p_1) \quad (2.26)$$

Og:

$$\Delta x_1^n = x_1(m, p'_1) - x_1(m'_u, p'_1) \quad (2.27)$$

Eksempel 2.3.2 Lad en forbruger have nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2 \quad (2.28)$$

Vi ved, at Marshall efterspørgslen er givet ved det følgende, idet der er tale om CD præferencer med faste forbrugsandele.

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{3}{5} \frac{m}{p_1}, \frac{2}{5} \frac{m}{p_2} \right] \quad (2.29)$$

Det er oplyst, at $m = 100$ og priserne er $(p_1, p_2) = (20, 20)$, som ændres til $(p_1, p_2) = (20, 25)$. Vi starter med at finde den oprindelige efterspørgsel inden prisændringen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \left[\frac{3}{5} \frac{100}{20}, \frac{2}{5} \frac{100}{20} \right] \\ &= [3, 2] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Og herefter den tilhørende nytte:

$$u(3, 2) = 3^3 \cdot 2^2 = 108 \quad (2.31)$$

Den kompenserende indkomst skal altså løse, at:

$$\left[\frac{3}{5} \cdot \frac{m}{20} \right]^3 \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{m}{25} \right]^2 = m \quad (2.32)$$

Som er $m \approx 109.336$. Substitutionseffekten bliver da:

$$\Delta x_1^s = \frac{3}{5} \cdot \frac{109.336}{20} - \frac{3}{5} \cdot \frac{100}{20} \approx 0.28 \quad (2.33)$$

$$\Delta x_2^s = \frac{2}{5} \cdot \frac{109.336}{25} - \frac{2}{5} \cdot \frac{100}{20} \approx -0.25 \quad (2.34)$$

Indkomsteffekten er da:

$$\Delta x_1^n = \frac{3}{5} \cdot \frac{100}{20} - \frac{3}{5} \cdot \frac{109.336}{20} \approx -0.28 \quad (2.35)$$

$$\Delta x_2^n = \frac{2}{5} \cdot \frac{100}{25} - \frac{2}{5} \cdot \frac{109.336}{25} \approx -0.15 \quad (2.36)$$

Hvorfor den samlede effekt bliver:

$$\Delta x_1 = 0.28 - 0.28 \approx 0 \quad (2.37)$$

$$\Delta x_2 = -0.25 - 0.15 \approx -0.4 \quad (2.38)$$

Som er stort set identisk med resultatet for Slutsky kompensationen.

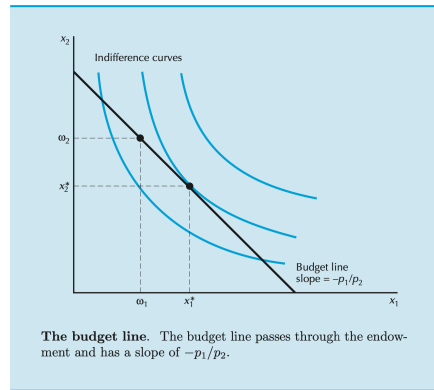
2.3.3 Slutsky dekomponering (endogen indkomst)

Hvis vi forestiller os en forbruger, der både er sælger og køber på et marked, bliver hans budgetbetingelse:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad \text{hvor} \quad m = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 \quad (2.39)$$

(ω_1, ω_2) angiver dermed forbrugerens initialbeholdning. Hvis $(\omega_1 - x_1) > 0$ siger vi, at forbrugeren er en netto køber af varen og vice versa. Forbrugeren budgetlinje vil fortsat have hældningen $-p_1/p_2$, men skal nu gå igennem den oprindelige allokering. Det vil sige [1]:

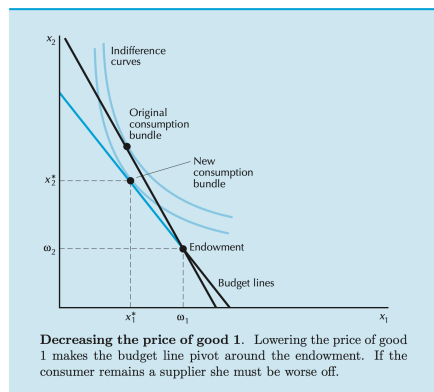
[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 2.7: Budgetlinjen for endogen indkomst

Hvis forbrugeren er en *net-sælger* og prisen på varen han sælger falder, vil det desuden gælde, at han garanteret er dårligere stillet. Det kan let ses ved nedenstående [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 2.8: Skift i budgetlinjen for endogen indkomst (1)

På samme måde kan vi være sikre på, at et personen stadigvæk vil være en *net-sælger*, hvis prisen på den vare han sælger stiger i pris. Det samme argumentet gælder for købere, dvs. en *net-køber* vil blive ved med at være køber, hvis varen han køber flader i pris, og en *net-køber*, vil være dårligere stillet, hvis varen han køber stiger i pris, hvis han bliver ved med at være køber. Slutsky dekomponeringen er her:

$$\Delta x_a = \Delta x_a^s + \Delta x_a^n + \Delta x_a^f \quad (2.40)$$

Hvor Δx_a^f er formueeffekten. Med differentialer kan vi skrive:

$$\frac{\delta x_a}{\delta p_a} = \frac{\delta x_a^s}{\delta p_a} + (\omega_a - x_a) \frac{\delta a^m}{\delta m} \quad (2.41)$$

Hvor den eneste forskel til førhen er, at vi skal tage højde for *netto efterspørgslen*. Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.3.3 Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad (2.42)$$

Initialbeholdningen er $(\omega_1, \omega_2) = (3, 2)$. I udgangspunktet er priserne $(p_1, p_2) = (10, 10)$. Vi starter med at løse forbrugers problem. Vi ser, at det er CD præferencer (montone, ingen randløsninger, strengt konvekse) med $a = b = 1$. Derfor bliver Marshall efterspørgslen:

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{1}{2} \frac{m}{p_1}, \frac{1}{2} \frac{m}{p_2} \right] \quad (2.43)$$

Forbrugers indkomst er:

$$3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 50 \quad (2.44)$$

Hvorfor budgetmængden er:

$$10x_1 + 10x_2 = 50 \quad (2.45)$$

Forbrugeren vælger her punktet:

$$\mathbf{x}^* = [2.5, 2.5] \quad (2.46)$$

Og er dermed en *net*-sælger af vare 1, og en *net*-køber af vare 2.

Priserne falder nu til $(p_1, p_2) = (5, 10)$. Derfor bliver indkomsten:

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 35 \quad (2.47)$$

Med budgetmængden:

$$5x_1 + 10x_2 = 35 \quad (2.48)$$

Hvorfor forbrugeren vælger punktet:

$$\mathbf{x}^* = [3.5, 1.75] \quad (2.49)$$

Og altså går til at blive en *net*-køber af vare 1, og en *net*-sælger af vare 2. Vi ønsker nu at opdele effekten i en substitutions, indkomst og formueeffekt. For at isolere de to første effekter lader vi indkomsten være eksogen. Da er den kompenserende indkomst:

$$2.5 \cdot 5 + 2.5 \cdot 10 = 37.5 \quad (2.50)$$

Hvorfor substitutionseffekten alene bliver:

$$\Delta x_1^s = \frac{1}{2} \frac{37.5}{5} - \frac{1}{2} \frac{50}{10} = 1.25 \quad (2.51)$$

$$\Delta x_2^s = \frac{1}{2} \frac{37.5}{10} - \frac{1}{2} \frac{50}{10} = -0.625 \quad (2.52)$$

Indkomsteffekten bliver:

$$\Delta x_1^n = \frac{1}{2} \frac{50}{5} - \frac{1}{2} \frac{37.5}{5} = 1.25 \quad (2.53)$$

$$\Delta x_2^n = \frac{1}{2} \frac{50}{10} - \frac{1}{2} \frac{37.5}{10} = 0.625 \quad (2.54)$$

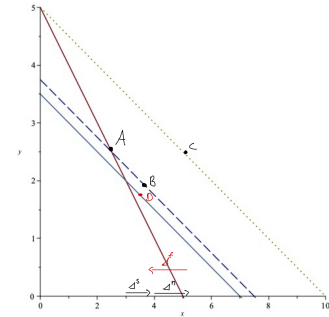
Formueeffekten findes som forskellen mellem efterspørgslen ved den endogene indkomst og de nye priser, og oprindelige indkomst ved de nye priser.

$$\Delta x_1^f = \frac{1}{2} \frac{35}{5} - \frac{1}{2} \frac{50}{5} = -1.5 \quad (2.55)$$

$$\Delta x_2^f = \frac{1}{2} \frac{35}{10} - \frac{1}{2} \frac{50}{10} = -0.75 \quad (2.56)$$

Hele processen er tegnet til højre, hvor den stiplede linje viser den kompenserende eksogene budgetlinje og den prikkede viser den eksogene indkomst ved de nye priser.

Det er klart, at vi indledningsvist får en positiv substitutionseffekt i retning mod mere mere x_1 , samtidig med, at der er en positiv indkomsteffekt. Omvendt er formueeffekten selvfølgelig negativ, idet forbrugeren nu får mindre for sine varer. Vi ser desuden, at forbrugeren nu lægger sig til højre for hans endowmentpunkt, og dermed bliver til en køber af x_1 og sælger af x_2 (modsat før).



Figur 2.9: Dekomponering af de forskellige effekter

2.4 Forbrugeroverskud

Når vi betragter forbrugere på et marked, er vi ofte interesseret i, hvilken effekt prisændringer har for deres velfærd. Hertil kan *forbrugeroverskuddet* bruges, der er defineret som arealet under efterspørgselskurve indtil ligevægtsprisen:

$$CS = \int_{p^*}^{p_{\max}} D(p) dp \quad (2.57)$$

Hvor $p_{\max}$ er den pris, hvor efterspørgslen er lig 0. Ændringer i forbrugeroverskuddet er givet ved:

$$\Delta CS = \int_{p_1}^{p_1'} D(p) dp \quad (2.58)$$

Bemærk dog, at ovenstående mål kun er akkurate for kvasilineære præferencer, idet der her er ingen indkomsteffekt. For andre præferencerelationer, vil en ændring i priserne ligeledes give anledning til en effekt gennem en højere eller lavere indkomst (samlet set). Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.4.1 Vi betragter to forbrugere med præferencerne:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad (2.59)$$

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad (2.60)$$

De er velkendte, og vi ved, at Marshall efterspørgslen for perfekte

substitutter er givet ved:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{hvis } p_1 < p_2 \\ \text{Alle varebundter i budgetmængden} & \text{hvis } p_1 = p_2 \\ \left[0, \frac{m}{p_2} \right] & \text{hvis } p_1 > p_2 \end{cases} \quad (2.61)$$

Mens vi for perfekte komplementer ved, at der må gælde, at $x_1 = x_2$, hvorfor vi har:

$$\mathbf{x} = \left[\frac{m}{p_1 + p_2}, \frac{m}{p_1 + p_2} \right] \quad (2.62)$$

Vi betragter en situation, hvor prisen på vare 2 er fast på $p_2 = 3$ og beregner nu forskellen i CS som følge af en prisstigning på vare 1 fra 1 til 2. Indkomsten er $m = 120$.

$$\Delta CS_1 = \int_1^2 \frac{120}{p_1} \approx -83.17 \quad (2.63)$$

$$\Delta CS_2 = \int_1^2 \frac{120}{p_1 + 3} \approx -26.77 \quad (2.64)$$

Vi ser herefter på en situation, hvor prisen stiger yderligere til $p_2 = 5$. Forbruger 1 vil her skifte til det andet gode, hvorfor falder i CS kun gælder fra 2 til 3.

$$\Delta CS_1 = \int_2^3 \frac{120}{p_1} \approx -48.7 \quad (2.65)$$

$$\Delta CS_2 = \int_1^2 \frac{120}{p_1 + 3} \approx -56.4 \quad (2.66)$$

2.4.1 EV og CV

Vi definerer den *ækvivalerende variation* (EV) til at være det beløb en forbruger er villig til at opgive i udgangspunktet for at have det samme nytteniveau som efter en prisstigning. Det løser altså ligningen:

$$u(\mathbf{x}^*(p', m)) = u(\mathbf{x}^*(p, m - EV)) \quad (2.67)$$

Den *komenserende variation* er omvendt den ekstra sum penge forbrugeren skal have for at være lige så godt stillet ved de nye priser som ved de gamle.

$$u(\mathbf{x}^*(p, m)) = u(\mathbf{x}^*(p', m + CV)) \quad (2.68)$$

Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.4.2 Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = 2 \ln x_1 + 3 \ln x_2 \quad (2.69)$$

Vi ser, at det er en monoton voksende transformation af CD (strengt konvekse, monotone, ingen randløsninger) hvor $a = 2$ og $b = 3$. Da er

Marshall efterspørgslen:

$$\mathbf{x} = \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_1}, \frac{3}{5} \frac{m}{p_2} \right] \quad (2.70)$$

Den opnåede nytte som fkt. af efterspørgslerne er da:

$$\begin{aligned} u(x_1^*, x_2^*) &= 2 \cdot \ln \left[\frac{2}{5} \frac{m}{p_1} \right] + 3 \cdot \ln \left[\frac{3}{5} \frac{m}{p_2} \right] \\ &= 5 \ln(m) - 2 \ln(p_1) - 3 \ln(p_2) + c \end{aligned} \quad (2.71)$$

Den kompenserende variation for en vilkårlig prisændring for p_1 skal da løse ligningen:

$$\begin{aligned} 5 \ln(m) - 2 \ln(p_1) - 3 \ln(p_2) &= 5 \ln(m + CV) - 2 \ln(\bar{p}_1) - 3 \ln(p_2) \\ 5 \ln(m) - 2 \ln(p_1) &= 5 \ln(m + CV) - 2 \ln(\bar{p}_1) \\ 5 \ln(m) - 2 \ln(p_1) + 2 \ln(\bar{p}_1) &= 5 \ln(m + CV) \\ CV &= \left(\frac{\bar{p}_1 m^{\frac{5}{2}}}{p_1} \right)^{\frac{2}{5}} - m \end{aligned} \quad (2.72)$$

På samme måde skal den ækvivalerende variation løse:

$$\begin{aligned} 5 \ln(m - EV) - 2 \ln(p_1) &= 5 \ln(m) - 2 \ln(\bar{p}_1) \\ EV &= - \left(\frac{m^{\frac{5}{2}} p}{k} \right)^{\frac{2}{5}} + m \end{aligned} \quad (2.73)$$

Tabet i forbrugeroverskud for en prisstigning i p_1 er:

$$\Delta CS = -\frac{2m}{5} \int_{p_1}^{p'_1} \frac{1}{p} dp \quad (2.74)$$

$$= -\frac{2m}{5} [\ln(p)]_{p_1}^{p'_1} \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

2.5 Beslutninger over tid

Når vi betragter en forbruger henover to perioder, kan vi skrive budgetbegrænsningen op som følger:

$$(1+r)c_1 + (1+\pi)c_2 = (1+r)m_1 + m_2 \quad (2.77)$$

$$c_1 + \frac{(1+\pi)}{(1+r)}c_2 = m_1 + \frac{m_2}{(1+r)} \quad (2.78)$$

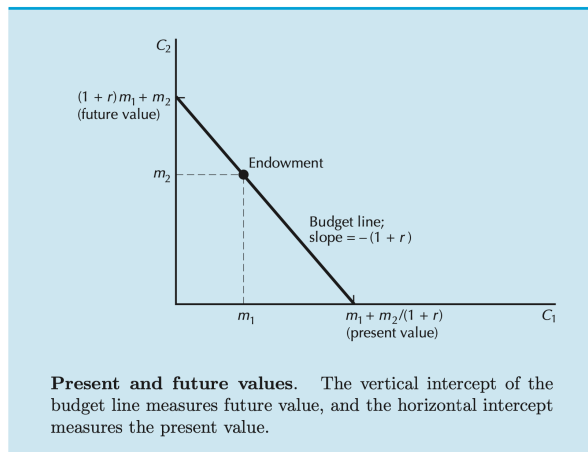
Hvor den første er angivet som fremtidsværdier, og den anden som nutidsværdier. Når budgetlinjen tegnes i et c_1, c_2 diagram (uden inflation) får vi:

$$c_2 = m_1 \cdot (1+r) + m_2 - c_1 \cdot (1+r)$$

Som altså er en ret linje med hældning $-(1+r)$. Vi ser, at forbrugen kan vælge at forbruge hele sin indkomst i c_2 , og får her: $m_1 \cdot (1+r) + m_2$,

eller det hele i c_1 , hvor forbruget bliver: $m_1 + \frac{m_2}{(1+r)}$. En forøgelse af renten fører til, at hældningen bliver stejlere, svarende til, at man skal opgive mere forbrug i morgen får at få en enhed mere forbrug i dag, fordi det fremtidige forbrug bliver diskonteret mere. Budgetlinjen er visualiseret nedenfor [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 2.10: Den intertemporale budgetbetingelse

Hvis forbrugeren vælger et punkt $c_1 > m_1$ vil han være låntager og vice versa, hvis $c_1 < m_1$. Det er klart, at en forbruger, der er låntager, vil blive ved med at være det, hvis renten falder, og er værre stillet, hvis renten stiger og han bliver ved med at være låntager (det samme argument, med omvendt fortegn, gælder for långivere). Slutsky ligningen bliver:

$$\frac{\delta c_1}{\delta p_1} = \frac{\delta c_1^s}{\delta p_1} + (m_1 - c_1) \frac{\delta c_1^m}{\delta m} \quad (2.79)$$

En stigning i renten (prisen på forbrug i dag) skyldes altså på den ene side en substitutionseffekt ($\frac{\delta c_1^s}{\delta r}$), der altid er negativ, og trækker i retning af, at forbruge mindre i dag. På den anden side vil det (for et normalt gode) gælde, at indkomsteffekten er positiv. Hvis $m_1 > c_1$ er det altså ikke klart, om forbrugeren vil forbruge mere eller mindre i dag som følge af en stigning i renten (han vil dog altid forblive lånegiver). Omvendt gælder det, hvis forbrugeren er en låntager, her vil $m_1 < c_1$ og hele udtrykket vil *altid* være negativt. Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.5.1 Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(x_1, x_2) = 2 \ln c_1 + 3 \ln c_2 \quad (2.80)$$

Det er oplyst, at $I_1 = 100$, $I_2 = 110$, $r = 0.05$ og $\pi = 0.02$. Da det er standard CD præferencer kan vi med det samme aflæse, at løsningen er:

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{2}{5} \frac{m}{p_1}, \frac{3}{5} \frac{m}{p_2} \right] \quad (2.81)$$

Budgetbetingelsen er:

$$(1 + 0.05)c_1 + (1 + 0.02)c_2 = (1 + 0.05)100 + 110$$

$$c_1 + \frac{(1 + 0.02)}{(1 + 0.05)}c_2 = 100 + \frac{110}{(1 + 0.05)} \quad (2.82)$$

Det vil sige prisen af forbrug i periode 2 er 0.9714. Indkomsten henover de to perioder er:

$$m = 100 + \frac{110}{1.05} = 204.76 \quad (2.83)$$

Hvorfor det optimale forbrugsbundt er:

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{2}{5} \cdot 204.76, \frac{3}{5} \cdot \frac{204.76}{0.9714} \right] = [81.9, 126.47] \quad (2.84)$$

Vi ser altså, at forbrugeren udjævner henover de to perioder, og sparer op i den første periode, mens han forbruger mere end hvad han tjener i den anden ($126.47 \cdot 1.02 \approx 129$).

Hvis inflationen nu pludselig stiger til 0.2 mens renten er uændret, bliver budgetbetingelsen:

$$c_1 + \frac{(1 + 0.2)}{(1 + 0.05)} c_2 = 100 + \frac{110}{(1 + 0.05)} \quad (2.85)$$

Dvs. prisen på forbrug i periode 2 stiger til 1.14. Det ændrer imidlertid ikke forbrugeres valg af forbrug i den første periode, mens det falder dramatisk i den anden:

$$\mathbf{x}^* = \left[\frac{2}{5} \cdot 204.76, \frac{3}{5} \cdot \frac{204.76}{1.14} \right] = [81.9, 107.76] \quad (2.86)$$

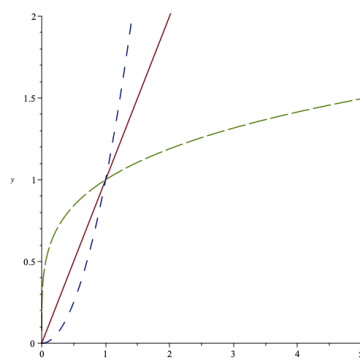
Bemærk, at han dog stadigvæk forbruger mere end han tjener i den anden periode ($107.76 \cdot 1.2 \approx 129$). Resultatet kommer af, at forbrugeren har CD præferencer og vil forbruge en fast andel af sit budget i begge perioder.

2.6 Usikkerhed

Når vi betragter en forbrugers valg under usikkerhed, vil valget afhænge af, hvad den forventede nytte er under de forskellige muligheder. Lad π_1 være sandsynligheden for c_1 og π_2 være sandsynligheden for c_2 . Da er den forventede nytte blot den vægtede sum:

$$\mathbb{E}(u) = \pi_1 \cdot u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \quad (2.87)$$

Man kan desuden let afgøre om en forbruger er risikoavers, risikoneutral eller risikoelskende ved at betragte vedkommendes indifferenskurver. Se nedenstående:



Figur 2.11: Indifferenskurver og risikoprofil

For forbrugeren med den grønne nyttefunktion ser vi, at linearkombinationer giver strengt mindre nytte end et *sikkert nytteniveau*, dvs. $0.5 \cdot u(0.5) + 0.5 \cdot u(1.5) < u(1)$, hvorfor personen er *risiko-avers*. Det modsatte gælder for forbrugeren med den blå indifferenskurve. Personen med den røde indifferenskurve vil være *risikoneutral*. Der gælder det generelle resultat, at forbrugere med strengt konvekse nyttefunktioner er *risiko-elskende*, forbrugere med strengt konkave nyttefunktioner er *risiko-averse* og personer med lineær nytte er *risiko neutrale*.

Vi definerer desuden sikkerhedsækvivalanten, $C(\mathcal{L})$ som det beløb forbrugeren skal have for at være indifferent mellem at modtage beløbet eller deltage i lotteriet, $\mathcal{L}$:

$$u(C(\mathcal{L})) = \mathbb{E}_{\mathcal{L}}[u(c)] \quad (2.88)$$

Forskellen mellem den forventede værdi af lotteriet og sikkerhedsækvivalanten kaldes *risikopræmien*, hvor:

$$RP = \mathbb{E}_{\mathcal{L}}(c) - C(\mathcal{L}) \quad (2.89)$$

Eksempel 2.6.1 Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(c) = c^{\frac{1}{2}} \quad (2.90)$$

Hvor $\pi_1 = 0.5$, $c_1 = 1$, $\pi_2 = 0.5$, $c_2 = 16$. Den forventede nytte er altså:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{L}}[u(c)] = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 4 = 2.5 \quad (2.91)$$

Sikkerhedsækvivalanten er altså:

$$c^{\frac{1}{2}} = 2.5 \quad (2.92)$$

$$c = 6.25 \quad (2.93)$$

Mens risikopræmien bliver:

$$RP = 8.5 - 6.25 = 2.25 \quad (2.94)$$

Vi kan bruge ovenstående til at løse simple forsikringsproblemer ved at se forsikring som et lotteri. Se eksemplet nedenfor:

Eksempel 2.6.2 Vi betragter en forbruger med nyttefunktionen:

$$u(c) = \ln c \quad (2.95)$$

Forbrugeren har en indkomst $m > 200$, og der er en sandsynlighed på 1 pct. for at forbrugeren oplever et tab på 200. Forbrugeren kan vælge at købe en forsikringssum $K \geq 0$, hvilket koster en forsikringspræmie, γK , uanset om tabet opstår eller ej. Parameteren γ er mellem 0 og 1. Forbrugeren bruger hele sin indkomst, efter at have betalt forsikringen på forbrug. Forbrugers situation kan beskrives som et lotteri, hvor

de to udfald er:

$$0.99 \cdot \ln(m - \gamma K) \quad (2.96)$$

$$0.01 \cdot \ln(m - 200 - \gamma K + K) \quad (2.97)$$

Da vi kræver et strengt positivt forbrug skal det gælde, at:

$$\begin{aligned} m - \gamma K &> 0 \\ \frac{m}{\gamma} &> K \end{aligned} \quad (2.98)$$

Samt:

$$\begin{aligned} m - 200 - \gamma K + K &> 0 \\ K \cdot (1 - \gamma) &> 200 - m \\ K &> \frac{200 - m}{1 - \gamma} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Vi kræver altså, at: $\frac{200-m}{1-\gamma} < K < \frac{m}{\gamma}$. Forbrugerens problem kan nu forenkles til:

$$\max_K 0.99 \cdot \ln(m - \gamma K) + 0.01 \cdot \ln(m - 200 - \gamma K + K) \quad (2.100)$$

Med FOC:

$$\begin{aligned} \frac{-0.99\gamma}{m - \gamma K} + \frac{0.01 \cdot (1 - \gamma)}{m - 200 - \gamma K + K} &= 0 \\ \frac{0.01 \cdot (1 - \gamma)}{m - 200 - \gamma K + K} &= \frac{0.99\gamma}{m - \gamma K} \\ 0.99\gamma \cdot [m - 200 - \gamma K + K] &= 0.1 \cdot (1 - \gamma) \cdot [m - \gamma K] \\ K &= \frac{(m - 198)\gamma - 0.01m}{\gamma(\gamma - 1)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Hvis forsikringspræmien er lig risikoen for, at udfaldet sker, er der tale om en *aktuarisk fair* forsikring, hvor forsikringstageren vil forsikre sig fuldt ud. Det ses her ved at sætte $\gamma = 0.01$ ind og se, at udtrykket her altid vil give $K = 200$. Hvis $\gamma > 0.01$ vil forbrugeren vælge $k > 200$ og vice versa, hvis $\gamma < 0.01$.

2.7 Ligevægt

Efterspørgselskurven — som fundet ud fra Marshall efterspørgslen — angives i et $q - p$ diagram, hvorfor Marshall efterspørgslen skal inverteres, da den giver efterspørgslen som funktion af prisen $D(p)$ og vi ønsker at finde prisen som funktion af efterspørgslen $P(q)$. Hvis vi f.eks. har:

$$D(p) = a - 2 \cdot p \quad (2.102)$$

Skal vi i et $q - p$ diagram skrive:

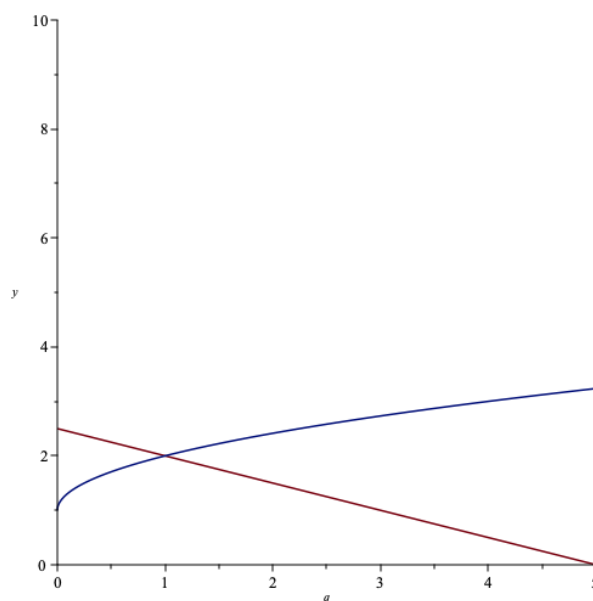
$$\begin{aligned} q &= a - 2 \cdot p \\ -2 \cdot p &= q - a \end{aligned}$$

$$P(q) = \frac{a}{2} - \frac{q}{2} \quad (2.103)$$

Bemærk, at udtrykkene er fortæller nøjagtig den samme ting. (2.102) fortæller os, hvad efterspørgslen er for en given pris, men (2.103) fortæller, hvad prisen skal være for at tilvejebringe en given efterspørgsel. Vi skal gøre det samme for markedsudbuddet. Det vil sige, at hvis udbuddet f.eks. er $S(p) = (p - 1)^2$ for $p > 1$, skal vi skrive:

$$\begin{aligned} q &= (p - 1)^2 \\ \sqrt{q} &= p - 1 \\ P(q) &= \sqrt{q} + 1 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Begge kurver er skitseret nedenfor for $a = 5$:



Figur 2.12: Markedsligevægt

I markedsligevægten gælder det, at udbud er lig efterspørgsel. Ligevægtsprisen skal altså løse:

$$\begin{aligned} a - 2 \cdot p &= (p - 1)^2 \\ a - 2 \cdot p &= p^2 - 2p + 2 \\ p^2 + 1 - a &= 0 \\ D &= -4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = -4 + 4a \\ p^* &= \frac{\sqrt{-4 + 4a}}{2} = \sqrt{a - 1} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Hvorfor ligevægtsmængden er:

$$q^* = a - 2 \cdot \sqrt{a - 1} \quad (2.106)$$

2.7.1 Skatter

Når vi betragter en skat, kan vi finde den nye ligevægtspris ved enten at pålægge enten udbyderne eller forbrugerne den formelle skattebyrde. I

de to tilfælde skriver man hhv:

$$p_s = p_b - t \quad (2.107)$$

$$p_b = p_s + t \quad (2.108)$$

Vi løser for den nye ligevægtspris med begge metoder, dvs:

$$\begin{aligned} a - 2 \cdot (p_s + t) &= (p_s - 1)^2 \\ a - 2p_s - 2t &= p_s^2 - 2p_s + 1 \\ p_s^2 + 1 - a + 2t &= 0 \\ D &= -4 \cdot (1 - a + 2t) = -4 + 4a - 8t \\ p_s^* &= \frac{\sqrt{-4 + 4a - 8t}}{2} = \sqrt{a - 1 - 2t} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Og tilsvarende, hvis skatten skal betales af sælgerne:

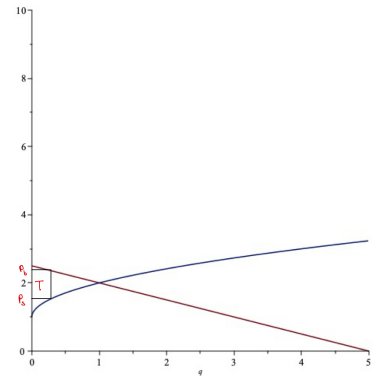
$$\begin{aligned} a - 2 \cdot p_b &= ((p_b - t) - 1)^2 \\ p_b &= t + \sqrt{a - 2t - 1} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Hvis $t = 0.5$, og $a = 5$ bliver ligevægtsprisen altså:

$$p_s^* = \sqrt{5 - 1 - 2} \approx 1.41 \quad (2.111)$$

$$p_b^* = 1 + \sqrt{5 - 1 - 2} \approx 2.41 \quad (2.112)$$

Som er skitseret til højre:

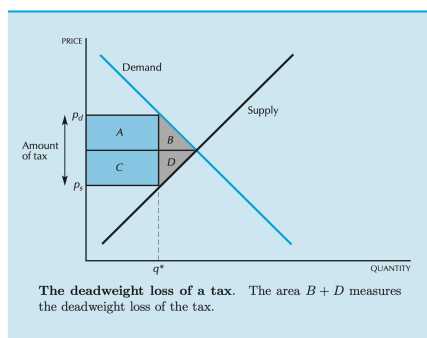


Figur 2.13: Markedsligevægt med skat

Dødvægtstab

Når vi indfører en skat på et marked, og der som følge heraf sker et tab af velfærd, der ikke kompenseres for med skatteindtægter, siger vi, at der er et dødvægtstab. Det er illustreret nedenfor ved arealerne $B + D$ [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*

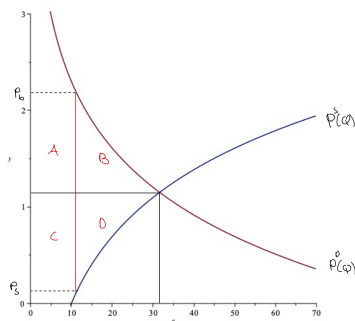


Figur 2.14: Illustration af dødvægtstab

Arealerne $A + B$ kan findes som $A + B = \int_{p_b}^{p^*} D(p) dp$, hvorfor B kan findes som $B = q^* \cdot p_b - A + B$. Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 2.7.1 Vi betragter et marked, hvor udbuds- og efterspørgselskurverne er givet ved:

$$D(p) = 100 \cdot e^{-p} \quad (2.113)$$



Figur 2.15: Illustration af markedsligevægten med skat

$$S(p) = 10 \cdot e^p \quad (2.114)$$

For at tegne kurverne i et $q - p$ diagram inverteres de, dvs:

$$\begin{aligned} q &= 100 \cdot e^{-p} \\ P(q)_d &= -\ln(q) + \ln(100) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Samt:

$$\begin{aligned} q &= 10 \cdot e^p \\ P(q)_s &= \ln(q) - \ln(10) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Ligevægtsprisen er:

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{-p} &= e^p \\ \ln(10) - p &= p \\ \ln(10) &= 2p \\ p &= \frac{\ln(10)}{2} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Hvorfor ligevægtsmængden bliver $q^* \approx 31.62$. Der bliver nu indført en skattesats på $t = 2$. I ligevægt skal købere altså betale:

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{-p_b} &= e^{(p_b - t)} \\ \ln(10) - p_b &= p_b - t \\ \ln(10) &= 2p_b - t \\ p_b^* &= \frac{\ln(10) + 2}{2} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Mens sælgere betaler $p_s = \frac{\ln(10)+2}{2} - 2$. Det er skitseret i markedsligevægten til venstre.

Vi starter med at bestemme arealet af $A + B$. Da:

$$A + B = \int_{\frac{\ln(10)}{2}}^{\frac{\ln(10)+2}{2}} 100 \cdot e^{-p} dp \approx 20 \quad (2.119)$$

Den handlede mængde i ligevægt er ca. 11.63, hvorfor højden af rektanglet bliver $11.63 \cdot \left[\frac{\ln(10)+2}{2} - \frac{\ln(10)}{2} \right] = 11.63$. Derfor er arealet $B \approx 20 - 11.63$. Arealet $C + D$ er:

$$C + D = \int_{\frac{\ln(10)+2}{2} - 2}^{\frac{\ln(10)}{2}} 10 \cdot e^p dp \approx 20 \quad (2.120)$$

Og derfor bliver arealet af D igen $\approx 20 - 11.63$. Dødvægtstabet er nu summen af $B + D$.

2.7.2 Elasticitet

Elasticiteten er defineret som:

$$E = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y} \quad (2.121)$$

Og angiver, hvor mange pct. y ændres, når p ændres med 1 pct. Hvis vi f.eks. har udbudsfunktionen $S(p) = (p - 1)^2$ bliver elasticiteten:

$$E = 2 \cdot (p - 1) \cdot \frac{p}{(p - 1)^2} = \frac{2p}{(p - 1)} \quad (2.122)$$

PRODUCENTEN

3.1 Profitmaksimering

En virksomheds overskud kan skrives på formen:

$$\pi = p \cdot y - \omega_1 x_1 - \omega_2 x_2 \quad (3.1)$$

hvor ω angiver priserne på input, og p angiver prisen på output. Vi vil i det følgende betragte virksomhedens profitmaksimeringsproblem på både kort og lang sigt.

3.1.1 Returns to scale

En produktionsfunktion kan enten have *increasing*-, *decreasing*- eller *constant returns to scale*. De forskellige muligheder beskriver, hvordan produktionen ændres, når begge input i produktionen øges med en faktor t . For CD har vi:

$$f(\ell, K) = A \cdot (\ell \cdot t)^a \cdot (K \cdot t)^b = t^{a+b} \cdot f(\ell, K) \quad (3.2)$$

Vi ser, at produktionsfunktionen udviser positivt skalafkast, når $a + b > 1$, konstant, hvis $a + b = 1$ og negativt, hvis $a + b < 1$. Bemærk, at perfekte komplement- og substitutter altid udviser konstant skalaafkast, da:

$$\min\{t \cdot \ell, t \cdot K\} = t \cdot \min\{\ell, K\} \quad (3.3)$$

$$t \cdot a\ell + t \cdot bK = t \cdot (a\ell + bK) \quad (3.4)$$

Marginalprodukterne af en produktionsfunktion kan ligeledes være aftagende, konstante eller stigende, da:

$$\frac{\delta MPK}{\delta k} > 0 \quad \text{stigende MPK} \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta MPK}{\delta k} = 0 \quad \text{konstant MPK} \quad (3.6)$$

$$\frac{\delta MPK}{\delta k} < 0 \quad \text{aftagende MPK} \quad (3.7)$$

Bemærk, at en virksomhed med *constant returns to scale* nødvendigvis må have en langsigtet profit på 0, idet vi ellers kunne produktionen og øge profitten, hvilket vil være i modstrid med, at vi finder et produktionsniveau, der er profitmaksimerende.

3.1.2 Kort sigt

På kort sigt vil vi ofte antage, at virksomheden er begrænset af, at en faktor i produktionen er fast (ofte kapital/bygninger/land) og udgifterne til denne faktor skal afholdes uanset produktionsniveau. Lad $f(\ell, \bar{K})$

3.1	Profitmaksimering	37
3.1.1	Returns to scale	37
3.1.2	Kort sigt	37
3.1.3	Lang sigt	39
3.1.4	Afsløret profitabilitet (WAPM)	40
3.2	Omkostningsminimering	41
3.2.1	Kort sigt	41
3.2.2	Lang sigt	42
3.2.3	Afsløret omkostningsminimering	42
3.2.4	Sammenhæng til profitmaksimering	43
3.3	Forskellige kurver	46
3.4	Producentoverskud	48
3.5	Antal virksomheder . . .	50

angiver en vilkårlig produktionsfunktion, da bliver profitmaksimeringsproblemet på kort sigt (hvor $\bar{K}$ er fast):

$$\max_{\ell} p \cdot f(\ell, \bar{K}) - w\ell - rK \quad (3.8)$$

En grafisk måde at anskue problemet på, er ved tegne *isoprofitlinjer*, dvs. linjer, hvor profitten holdes fast:

$$\bar{\pi} = p \cdot y - w\ell - rK \quad (3.9)$$

Og omskrive det som en funktion alene af ℓ :

$$y = \frac{\bar{\pi}}{p} + \frac{w\ell}{p} + \frac{w\ell}{p} \quad (3.10)$$

Det er blot rette linjer med hældningen $\frac{w}{p}$. Maksimeringsproblemet giver FOC, at:

$$pf'(\ell, \bar{K}) - w \iff f'(\ell, \bar{K}) = \frac{w}{p} \quad (3.11)$$

Som dermed tilsiger, at hældningen af isoprofitlinjen skal være lig hældningen af produktionsfunktionen i det profitmaksimerende punkt. Bemærk, at beslutningen om at producere på kort sigt er, at dækningsbidraget skal være strengt positivt, dvs:

$$p \cdot f(\ell, \bar{K}) - w\ell > 0 \quad (3.12)$$

Da man ellers kunne producere 0 og nøjes med tabet $-rK$. Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 3.1.1 Vi betragter en virksomhed med produktionsfunktionen:

$$f(\ell, \bar{K}) = \ell^{\frac{1}{2}} \bar{K}^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Profitmaksimeringsproblemet på kort sigt bliver:

$$\max_{\ell} p \cdot \ell^{\frac{1}{2}} \bar{K}^{\frac{1}{2}} - w\ell - r\bar{K} \quad (3.14)$$

Det giver os følgende FOC:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ell^{-\frac{1}{2}} \bar{K}^{\frac{1}{2}} &= \frac{w}{p} \\ \frac{1}{2} \ell^{-\frac{1}{2}} \bar{K}^{\frac{1}{2}} &= \frac{2w}{p} \\ \ell^{-1} &= \frac{4w^2}{\bar{K}p^2} \\ \ell^* &= \frac{\bar{K}p^2}{4w^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Som giver et produktionsniveau på:

$$\begin{aligned} q^* &= \left[\frac{\bar{K}p^2}{4w^2} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{K}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{p}{2w} \bar{K} \end{aligned} \quad (3.16)$$

På kort sigt er kravet til positiv produktion, at:

$$py - c(y) \geq 0 \iff p = MC_{\text{kort sigt}} \geq \frac{c(y)}{y} = AC_{\text{kort sigt}} \quad (3.17)$$

3.1.3 Lang sigt

På lang sigt kan alle input frit justeres. Derfor bliver profitmaksimeringsproblemet her:

$$\max_{\ell, K} p \cdot f(\ell, K) - w \cdot \ell - r \cdot K \quad (3.18)$$

Løsningerne for ℓ^* og K^* kaldes for faktorefterspørgslen. Vi gennemgår tre eksempler af at finde sådanne.

Eksempel 3.1.2 Betragt en virksomhed med CD produktionsfunktionen:

$$f(\ell, K) = \ell^a K^b \quad (3.19)$$

Hvor $a + b < 1$. Vi opstiller maksimeringsproblemet:

$$\max_{\ell, K} p \cdot \ell^a K^b - w \cdot \ell - r \cdot K \quad (3.20)$$

Som giver os de følgende FOC:

$$a \cdot \ell^{a-1} K^b = \frac{w}{p} \quad (3.21)$$

$$b \cdot \ell^a K^{b-1} = \frac{r}{p} \quad (3.22)$$

Vi ganger den første med ℓ og den anden med k for at opnå:

$$\begin{aligned} a \cdot \ell^a K^b &= \frac{\ell w}{p} \\ a \cdot y &= \frac{\ell w}{p} \\ \ell^* &= \frac{ap y}{w} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} b \cdot \ell^a K^b &= \frac{Kr}{p} \\ b \cdot y &= \frac{Kr}{p} \\ K^* &= \frac{pb y}{r} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Det optimale niveau af output er nu givet ved:

$$\begin{aligned} y^* &= \left[\frac{ap y}{w} \right]^a \left[\frac{pb y}{r} \right]^b \\ &= \left[\frac{ap}{w} \right]^a \left[\frac{pb}{r} \right]^b y^{a+b} \\ y_*^{1-a-b} &= \left[\frac{ap}{w} \right]^a \left[\frac{pb}{r} \right]^b \end{aligned}$$

$$y^* = \left[\frac{ap}{w} \right]^{\frac{a}{1-a-b}} \left[\frac{pb}{r} \right]^{\frac{b}{1-a-b}} \quad (3.25)$$

Eksempel 3.1.3 Vi betragter nu en virksomhed med produktionsfunktionen givet ved:

$$f(\ell, K) = a\ell + bK \quad (3.26)$$

Maksimeringsproblemet opstilles:

$$\max pa\ell + pbK - w\ell - rK \quad (3.27)$$

Som giver FOC:

$$pa = w \quad (3.28)$$

$$bp = r \quad (3.29)$$

Hvis $pa < w$ er den optimale efterspørgsel efter arbejdskraft 0, mens $pa \geq w$ giver, at al efterspørgsel, $\ell \geq 0$ er optimal. Det samme gælder for K , her vil $bp < r$ medføre, at den optimale efterspørgsel er 0, mens $bp \geq r$ medfører, at al positiv efterspørgsel er optimal.

Eksempel 3.1.4 Vi betragter nu en virksomhed med produktionsfunktionen givet ved:

$$f(\ell, K) = \min\{a\ell, bK\} \quad (3.30)$$

Det er klart, at en omkostningsminimerende produktion medfører, at $a\ell = bK$. Derfor har vi $\ell = \frac{b}{a}K$. Hvilket vi indsætter i vores maksimeringsproblem:

$$\max_K p \cdot \frac{b}{a}K - w \cdot \frac{b}{a}K - r \cdot K \quad (3.31)$$

Som kan omskrives til:

$$\max_K K \cdot \left[p \frac{b}{a} - w \frac{b}{a} - r \right] \quad (3.32)$$

Vi ser med det samme, at hvis $p \frac{b}{a} - w \frac{b}{a} - r > 0$ vil virksomheden have incitament til at vælge en uendelig mængde K , hvorfor maksimeringsproblemet her ikke er defineret. Hvis $p \frac{b}{a} - w \frac{b}{a} - r < 0$ vil det omvendt kunne betale sig at have $K = \frac{b}{a}K = 0$. Hvis $p \frac{b}{a} - w \frac{b}{a} - r = 0$, er alle kombinationer af $K = \frac{b}{a}K \geq 0$ profitmaksimerende.

3.1.4 Afsløret profitabilitet (WAPM)

Sætningen om afløret profitabilitet tilsiger, at en virksomhed, der til priserne t vælger t skal opnå en højere profit, end hvis den havde valgt s og vice versa.

$$p^t y^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t y^s - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s, \quad (3.33)$$

$$p^s y^s - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s y^t - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t. \quad (3.34)$$

Hvis en virksomhed opfylder WAPM har vi:

$$\Delta p \Delta y - \Delta w \Delta \ell - \Delta r \Delta K \geq 0 \quad (3.35)$$

Som altså f.eks. siger, at en ændring i prisen på output, med alle andre faktorer holdt fast, vil lede til en ikke negativ ændring i den producerede mængde:

$$\Delta p \Delta y \geq 0 \quad (3.36)$$

På samme måde kan vi entydigt sige, at hvis en faktor stiger i pris, og de øvrige priser holdes fast, vil medføre en ikke positiv ændring i efterspørgslen heraf:

$$-\Delta r \Delta K \geq 0 \iff \Delta r \Delta K \leq 0 \quad (3.37)$$

3.2 Omkostningsminimering

Vi har i kurset opstillet omkostningsminimeringsproblemet for at udtrykke virksomhedens *cost funktion* som et udtryk af (y, w, r) og herefter f.eks. finde *AVC*, *MC* og *AC*. Vi har ligeledes brugt *cost* funktionen til indirekte at løse profitmaksimeringsproblemet (og herefter indsætte den fundne mængde i vores betingede faktorefterspørgsler), men bemærk, at omkostningsminimering IKKE kan give et produktionsniveau alene — det skal kombineres med profitmaksimering.

3.2.1 Kort sigt

For at finde virksomhedens omkostningsminimerende forbrug af de to input i produktionen (på kort sigt) skal vi løse:

$$\min_{\ell} w \cdot \ell - r \cdot \bar{K} \quad \text{u.b.b.} \quad f(\ell, \bar{K}) = y \quad (3.38)$$

Resultatet bliver de såkaldte betingede faktorefterspørgsler. Grafisk svarer løsningen til det punkt, hvor hældningen af isokvanten og isocostlinjerne er ens. Bemærk, at isokvanten defineres nøjagtig som indifferenskurver:

$$f(\ell, K) = y \quad (3.39)$$

Og isocostlinjerne er tilsvarende identiske med budgetlinjen:

$$w \cdot \ell + r \cdot K = C \iff K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r} \ell \quad (3.40)$$

Det vil sige, at:

$$-\frac{MP_1(\ell^*, K^*)}{MP_2(\ell^*, K^*)} = TRS(\ell^*, K^*) = -\frac{w}{r} \quad (3.41)$$

Cost funktionen er nu defineret til de samlede omkostninger i optimum, dvs:

$$c(w, r, y) = w \cdot \ell^*(w, r, y) + r \cdot \bar{K} \quad (3.42)$$

Vi gennemgår et eksempel.

Eksempel 3.2.1 Vi lader en virksomhed have produktionsfunktionen

givet ved:

$$q = \sqrt{K} \cdot \ell \quad (3.43)$$

Det er oplyst, at kapitalapparatet er fast på kort sigt, dvs. $\bar{K} = 16$. Priserne er $w = 10$, og $r = 4$. Vi skal altså løse:

$$\min_{\ell} 10 \cdot \ell - 64 \quad \text{u.b.b.} \quad 4\ell = y \quad (3.44)$$

Bibetingelsen tilsiger, at $\ell = \frac{y}{4}$, hvorfor cost functionen bliver:

$$C(q) = 10 \cdot \frac{q}{4} + 64 = 2.5q + 64 \quad (3.45)$$

3.2.2 Lang sigt

På lang sigt har vi:

$$\min_{\ell, K} w \cdot \ell - r \cdot K \quad \text{u.b.b.} \quad f(\ell, K) = y \quad (3.46)$$

Cost funktionen bliver her:

$$c(w, r, y) = w \cdot \ell^*(w, r, y) + r \cdot K^*(w, r, y) \quad (3.47)$$

Bemærk, at alle input er positive på lang sigt, hvorfor beslutningskravet til produktion er:

$$py - c(y) \geq 0 \iff p = MC_{\text{lang sigt}} \geq \frac{c(y)}{y} = AC_{\text{lang sigt}} \quad (3.48)$$

Eksempel 3.2.2 For en producent med Leontiff præferencer af formen:

$$f(\ell, K) = \min\{a\ell, bK\} \quad (3.49)$$

Bliver må vi kræve, at $\ell = \frac{y}{a}$, $K = \frac{y}{b}$, det medfører:

$$c(r, w, y) = w \left(\frac{y}{a} \right) + r \left(\frac{y}{b} \right) = y \left(\frac{w}{a} + \frac{r}{b} \right) = y \left(\frac{w}{a} + \frac{r}{b} \right) \quad (3.50)$$

For en producent med perfekte substitutter, dvs:

$$f(\ell, K) = a \cdot \ell + b \cdot K \quad (3.51)$$

Bliver cost funktionen altid:

$$c(r, w, y) = \min\{aw, br\}y = \min\{aw, br\}y \quad (3.52)$$

3.2.3 Afsløret omkostningsminimering

Hvis det gælder, at virksomheden ved priserne t valgte t og til tidspunkt s valgte s , og begge producerer den samme mængde output, skal det

gælde at:

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s \quad (3.53)$$

$$w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t \quad (3.54)$$

Hvis virksomheden omkostningsminimerer. Hvis ovenstående er overholdt, skal det gælde, at:

$$\Delta w \Delta \ell + \Delta r \Delta K \leq 0 \quad (3.55)$$

Dvs. at hvis prisen på den ene vare stiger og den anden forbliver konstant, skal ændringen i efterspørgslen være ikke-positiv.

3.2.4 Sammenhæng til profitmaksimering

Når en virksomhed vælger sine omkostningsminimerende input, svarer det altid til, at virksomheden profitmaksimerer. Vi kan derfor bruge cost funktionen — som fundet ved omkostningsminimering — til at opstille profitmaksimeringsproblemet. Her skal vi altså maksimere:

$$\max_y py - c(r, w, y) \quad (3.56)$$

Svaret vil give os et profitmaksimerende output, y^* som vi kan bruge til at bestemme efterspørgslen efter vores faktorer i optimum. Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 3.2.3 Vi lader en virksomhed have Leontiff præferencer givet ved:

$$f(\ell, K) = \min\{3\ell, 10K\} \quad (3.57)$$

Hvis virksomheden omkostningsminimerer ved vi, at der skal gælde, at $3\ell = 10K$, det vil sige, at:

$$\ell = \frac{10}{3}K \quad K = \frac{3}{10}\ell \quad (3.58)$$

Samtidig skal vi bruge $3\ell = 10K = y$, hvorfor vi får:

$$\ell = \frac{y}{3} \quad K = \frac{y}{10} \quad (3.59)$$

Cost funktionen bliver dermed:

$$c(r, w, y) = w \cdot \frac{y}{3} + k \cdot \frac{y}{10} = y \cdot \left[\frac{w}{3} + \frac{k}{10} \right] \quad (3.60)$$

Vi kan nu finde den optimale mængde som virksomheden skal producere ved:

$$\max_y py - y \cdot \left[\frac{w}{3} + \frac{k}{10} \right] = y \cdot \left[p - \frac{w}{3} - \frac{k}{10} \right] \quad (3.61)$$

Vi ser, at maksimeringsproblemet ikke har nogen løsning hvis $p - \frac{w}{3} - \frac{k}{10} > 0$, da virksomheden her vil producere uendelig meget. Hvis $p - \frac{w}{3} - \frac{k}{10} < 0$ vil virksomheden producere 0, og når $p - \frac{w}{3} - \frac{k}{10} = 0$ vil enhver mængde $y \geq 0$ være et optimum.

Vi gennemgår nu endnu et eksempel, der fletter det hele sammen.

Eksempel 3.2.4 Vi betragter en virksomhed med produktionsfunktionen givet ved:

$$f(\ell, k) = \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} \quad (3.62)$$

Vi opstiller profitmaksimeringsproblemet:

$$\max_{\ell, k} p \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} - w\ell - rk \quad (3.63)$$

Første ordens betingelserne er:

$$p \frac{1}{3} \ell^{\frac{1}{3}-1} k^{\frac{1}{3}} - w = 0 \quad (3.64)$$

$$p \frac{1}{3} k^{\frac{1}{3}-1} \ell^{\frac{1}{3}} - r = 0 \quad (3.65)$$

Vi omskriver:

$$p \frac{1}{3} \ell - w\ell = 0 \iff \ell = \frac{py^*}{3w} \quad (3.66)$$

$$p \frac{1}{3} k - rk = 0 \iff k = \frac{py^*}{3r} \quad (3.67)$$

Den samlede produktion bliver derfor:

$$\begin{aligned} y^* &= \left[\frac{py^*}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{py^*}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{p}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} y_*^{\frac{2}{3}} \\ y_*^{\frac{1}{3}} &= \left[\frac{p}{3w} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{p}{3r} \right]^{\frac{1}{3}} \\ y^* &= \left[\frac{p}{3w} \right] \left[\frac{p}{3r} \right] = \frac{p^2}{9wr} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Som nu kan indsættes i (3.64) og (3.65) for at få:

$$\ell^* = \frac{p^3}{27w^2r} \quad \text{og} \quad k^* = \frac{p^3}{27wr^2} \quad (3.69)$$

Den betingede faktorefterspørgsel findes ved at løse omkostningsminimeringsproblemet:

$$\min_{\ell, k} w\ell + rk \quad \text{u.b.b.} \quad y = \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} \quad (3.70)$$

Lagrange:

$$\mathcal{L}(\ell, k) = w\ell + rk + \lambda(y - \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}}) \quad (3.71)$$

FOC:

$$w - \lambda \frac{1}{3} \cdot \ell^{\frac{1}{3}-1} k^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (3.72)$$

$$r - \lambda \frac{1}{3} \cdot k^{\frac{1}{3}-1} \ell^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (3.73)$$

$$y - \ell^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (3.74)$$

Vi omskriver de første to:

$$w\ell - \lambda \frac{1}{3} \cdot y = 0 \quad (3.75)$$

$$rk - \lambda \frac{1}{3} y = 0 \quad (3.76)$$

Vi får nu:

$$\frac{w\ell}{rk} = 1 \iff \ell = \frac{rk}{w} \quad (3.77)$$

Som vi kan indsætte i b.b og få:

$$\begin{aligned} \left[\frac{rk}{w} \right]^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} &= y \\ \left[\frac{r}{w} \right]^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} &= y \\ k^{\frac{2}{3}} &= y \left[\frac{w}{r} \right]^{\frac{1}{3}} \\ k^* &= y^{\frac{3}{2}} \left[\frac{w}{r} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Herefter kan vi blot indsætte tilbage:

$$\ell^* = \frac{r}{w} y^{\frac{3}{2}} \left[\frac{w}{r} \right]^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{2}} \left[\frac{r}{www} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.79)$$

Cost funktionen bliver dermed:

$$\begin{aligned} C(w, r, y) &= r \cdot y^{\frac{3}{2}} \left[\frac{w}{r} \right]^{\frac{1}{2}} + w \cdot y^{\frac{3}{2}} \left[\frac{r}{w} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \\ &= 2 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Hvorfor marginalomkostningen er:

$$\frac{\delta c}{\delta y} = 3 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \quad (3.81)$$

Dvs. stigende, fordi der er decreasing returns to scale. Vi kan nu bruge cost funktionen til at udlede det optimale udbud:

$$\max py - 2 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \quad (3.82)$$

FOC:

$$\begin{aligned} p - 3 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} &= 0 \\ rwy &= \frac{p^2}{9} \\ y &= \frac{p^2}{9rw} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Vi skal dog være sikre på, at der rent faktisk bliver produceret her.

Hvorfor vi må tjekke, at:

$$p \geq \frac{c(y)}{y} \quad (3.84)$$

$$p \geq \frac{2 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}}{y} \quad (3.85)$$

$$p \geq 2 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \quad (3.86)$$

Da $p = MC$ og $MC = 3 \cdot r^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ er det altid overholdt.

Sammen med de betingede faktorefterspørgsler kan vi nu (igen) finde selve efterspørgslen i optimum:

$$\ell^* = \left[\frac{p^2}{9rw} \right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{r}{w} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{p^3}{3^3 r^{\frac{3}{2}} w^{\frac{3}{2}}} r^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} = \frac{p^3}{w^2 r 27} \quad (3.87)$$

Nu går vi tilbage til kort sigt, og antager, at virksomheden på kort sigt er begrænset til $\bar{k} = k$. Vores omkostningsminimeringsproblem bliver altså nu:

$$\min_{\ell} w \cdot \ell + r \cdot \bar{k} \quad \text{u.b.b.} \quad y = \ell^{\frac{1}{3}} \bar{k}^{\frac{1}{3}} \quad (3.88)$$

Som reduceres til:

$$\ell^{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\bar{k}^{\frac{1}{3}}} = \frac{y^3}{k} \equiv \ell_{\text{kort}}^* \quad (3.89)$$

Omkostningsfunktionen bliver da:

$$c(y, w, r) = \frac{wy^3}{\bar{k}} + r \cdot \bar{k} \quad (3.90)$$

Vi ved at, prisen er lig marginalomkostningen i ligevægt. Det vil sige:

$$3 \frac{wy^2}{\bar{k}} = p \iff y = \sqrt{\frac{pk}{3w}} \quad (3.91)$$

Kravet til positiv produktion er, at:

$$\frac{3wy^2}{\bar{k}} > \frac{wy^2}{\bar{k}} \quad (3.92)$$

Hvilket altid er opfyldt.

3.3 Forskellige kurver

De samlede omkostninger kan skrives som summen af de variable og faste omkostninger, det vil sige:

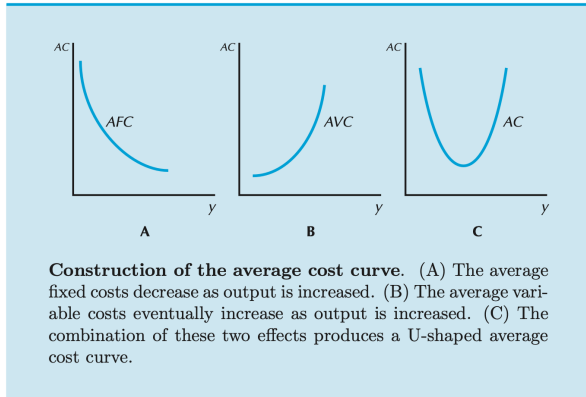
$$c(y) = c_v(y) + F \quad (3.93)$$

De gennemsnitlige faste omkostninger er da givet som:

$$AC(y) = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y) \quad (3.94)$$

Grafisk vil $AC(y)$ kurven da være u -formet, idet AFC aftager, når y stiger. På samme tid vil AVC være konstant indtil et vist punkt, hvor der produktionen bliver begrænset af den faste ressource, hvilket vil få AVC til at stige. Det er tegnet nedenfor [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



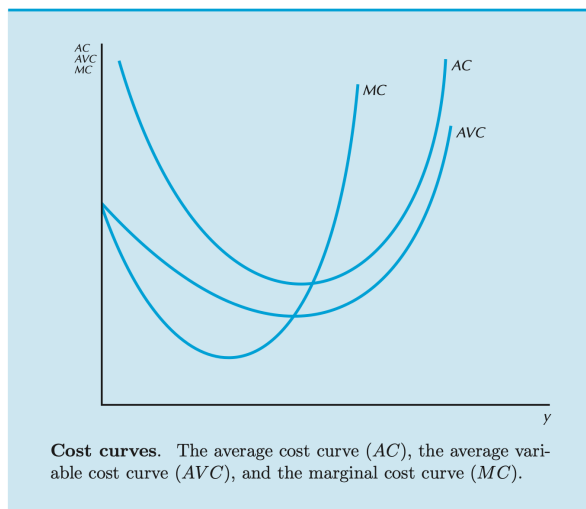
Figur 3.1: AFC , AVC og AC visualiseret

Marginalomkostningerne er blot den første ordens afledte af cost funktionen, dvs:

$$MC = \frac{\delta c(y)}{y} \quad (3.95)$$

Det gælder, at MC altid skærer AVC og AC i deres minima, samtidig med, at AVC og MC altid skærer andenaksen i samme punkt. Det ser således ud [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 3.2: AC , AVC og MC visualiseret

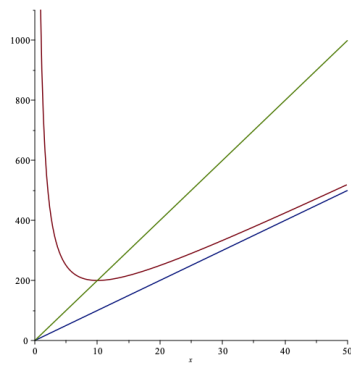
Det gælder desuden, at arealet under MC kurver svarer til de variable omkostninger.

Eksempel 3.3.1 Vi betragter en virksomhed med omkostningsfunktionen:

$$c(y) = 10y^2 + 1000 \quad (3.96)$$

De forskellige omkostningskurver har formen:

$$AC(y) = 10y + \frac{1000}{y} \quad (3.97)$$



Figur 3.3: AVC, AC og MC skitseret

$$AVC(y) = 10y \quad (3.98)$$

$$MC(y) = 20y \quad (3.99)$$

De er alle tegnet til venstre.

Bemærk, at vi med omkostningsfunktionen kan finde virksomhedens profitmaksimerende udbudsfunction ved:

$$\max_y py - 10y^2 + 1000 \quad (3.100)$$

Det giver os FOC:

$$p - 20y = 0 \iff y(p) = \frac{p}{20} \quad (3.101)$$

Profitten er her:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{p^2}{20} - 10 \left[\frac{p^2}{400} \right] - 1000 \\ &= \frac{2p^2}{40} - \frac{p^2}{40} - 1000 \\ &= p^2/40 - 1000 \end{aligned} \quad (3.102)$$

Som for $p > 0$ er strengt større end -1000 som er overskuddet vi opnår ved ingen produktion.

Bemærk desuden, at der i ligevægt må gælde, at alle virksomheder producerer ved det niveau, hvor deres gennemsnitlige omkostninger er ved deres laveste. Det ses lettest ved at betragte udtrykket for profit:

$$py - c(y) \iff y \cdot \left[p + \frac{c(y)}{y} \right] \iff y \cdot [p + AC] \quad (3.103)$$

Hvis $p < AC_{\min}$ vil virksomhederne forlade markedet, og der vil være ingen produktion. Hvis $p > AC_{\min}$, vil virksomhederne på markedet have positiv profit, og nye vil strømme til, hvilket vil ændre priserne (dermed er vi ikke i en ligevægt). Der må derfor gælde, at $p = AC_{\min}$

3.4 Producentoverskud

Vi definerer producentoverskudet som omsætning, minus de variable omkostninger. Det vil sige:

$$PS = py - c_v(y) \quad (3.104)$$

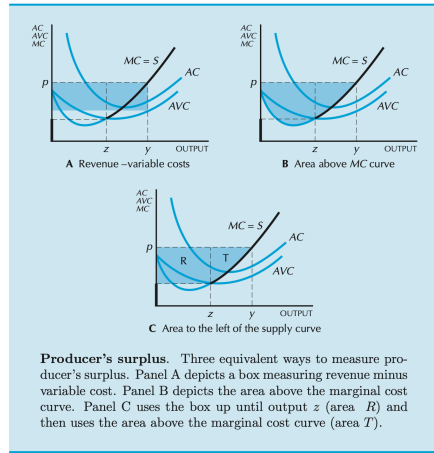
Der er tre forskellige måder vi grafisk kan bestemme PS som er vist nedenfor [1].

I figur (A) er det firkantede areal blot bestemt som:

$$PS = p \cdot y^* - y^* \cdot AVC(y) \quad (3.105)$$

I figur (B) udnyttes det, at arealet under MC kurver svarer til de marginale

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 3.4: Producentoverskud visualiseret

omkostninger, hvorfor vi har:

$$PS = p \cdot y^* - \int_0^{y^*} MC dy \quad (3.106)$$

I figur (C) benytter vi den sædvanlige metode, dvs. arealet under udbudskurven i et $p - y$ diagram:

$$PS = \int_{p_{\min}}^{p^*} S(p) dp \quad (3.107)$$

Vi gennemgår et eksempel af en udregning nedenfor.

Eksempel 3.4.1 Vi betragter en virksomhed med omkostningsfunktionen:

$$c(y) = y^3 - 2y^2 + 2y + 1 \quad (3.108)$$

De forskellige omkostningstyper findes:

$$AC = y^2 - 2y + 2 + \frac{1}{y} \quad (3.109)$$

$$AVC = y^2 - 2y + 2 \quad (3.110)$$

$$MC = 3y^2 - 4y + 2 \quad (3.111)$$

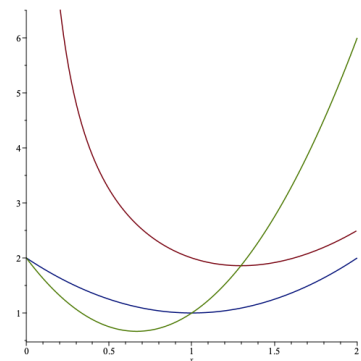
De er tegnet til højre.

For et positivt udbud skal det gælde, at $AVC(y) \geq MC(y)$. Altså:

$$\begin{aligned} 3y^2 - 4y + 2 &\geq y^2 - 2y + 2 \\ 2y^2 - 2y &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Det er opfyldt, når $y \geq 1$. Udbudsfunktionen findes ved at løse profitmaksimeringsproblemet:

$$\max_y py + y^3 - 2y^2 + 2y + 1 \quad (3.113)$$



Figur 3.5: AVC, AC og MC skitseret

FOC:

$$\begin{aligned}
 MC &= p \\
 3y^2 - 4y + 2 &= p \\
 3y^2 - 4y + 2 - p &= 0 \\
 y^* &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{-2+3p}}{3} \quad (3.114)
 \end{aligned}$$

Som er altså er udbudsfunktionen for $y \geq 1$, og kun er defineret for $p > 1$. For $p < 1$ er udbuddet nul, og i knæpunktet er både en produktion på 0 og 1 profitmaksimerende.

Vi bestemmer nu producentoverskuddet ved de tre forskellige arealer. Vi starter med at indse, at produktionen ved $p = 6$ er:

$$y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{-2+3 \cdot 6}}{3} = 2 \quad (3.115)$$

Derfor får vi figur A til:

$$PS = 6 \cdot 2 - 2[4 - 4 + 2] = 8 \quad (3.116)$$

Figur B giver:

$$PS = 6 \cdot 2 - \int_0^2 [3y^2 - 4y + 2] = 8 \quad (3.117)$$

Og afsluttende figur C, der giver:

$$PS = \int_1^6 \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{-2+3p}}{3} dp = \left[\frac{2p}{3} + \frac{2(3p-2)^{\frac{3}{2}}}{27} \right]_1^6 = 8 \quad (3.118)$$

3.5 Antal virksomheder

Det kan være nyttigt at indse, at man på et marked, hvor hver virksomhed har ens produktionsfunktion kan bestemme antallet af virksomheder som det samlede output i markedsligevægten, divideret med hver virksomheds produktion. Altså:

$$\text{Virksomheder i ligevægt} = \frac{Q_{\text{på markedet}}}{q_{\text{hver virksomheds produktion}}} \quad (3.119)$$

Vi gennemgår et eksempel nedenfor.

Eksempel 3.5.1 På et marked har alle virksomheder den samme produktionsteknologi, der giver anledning til den følgende omkostningsfunktion:

$$c(y) = 3y^2 + 300 \quad \text{hvis } y > 0 \quad (3.120)$$

De langsigtede gennemsnitlige omkostninger bliver da:

$$AC(y) = 3y + \frac{300}{y} \quad (3.121)$$

Vi ved, at det i ligevægt gælder, virksomhed producerer ved det niveau, hvor $AC_{\min} = p$, idet der ellers ville være entry på markedet, og dermed ingen ligevægt. Vi finder $AC_{\min}$:

$$3 - \frac{300}{y^2} = 0 \iff y = 10 \quad (3.122)$$

Hvor vi bemærker, at det er et minima, idet den andenaflædte er $\frac{600}{y^3} > 0$. Den langsigtede ligevægtspris findes nu ved igen at indse, at hver virksomhed netop opererer ved det punkt, hvor deres gennemsnitlige omkostninger er minimeret. Altså:

$$30 + \frac{300}{10} = 60 = p \quad (3.123)$$

Alternativt havde vi kunne indse, at $MC = p$ og $MC(10) = 60$. Samtidig havde vi kunne sætte $MC = AC$ og her få $y = 10$. Hvis vi lader efterspørgslen være givet ved:

$$D(p) = 1000 - 10p \quad (3.124)$$

Kan vi finde markedsligevægten til $D(p) = 400$, hvorfor der er 40 virksomheder på markedet.

Vi betragter nu det samme marked på kort sigt.

Eksempel 3.5.2 Vi antager nu, at virksomhederne på kort sigt har omkostningsfunktionen givet ved:

$$c^{SR}(y) = 2y^2 + 4\bar{k} + 300 \quad 0 \leq y \leq 2\sqrt{\bar{k}} \quad (3.125)$$

Vi betragter bibetingelsen, der tilsiger, at vi skal bruge mindst $2\sqrt{\bar{k}}$ for at producere y . Det giver os:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\bar{k}} &\geq y \\ \bar{k} &\geq \frac{y^2}{4} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Vi skal altså mindst have $\bar{k} = \frac{y^2}{4}$ for at producere y enheder. Vi indsætter den laveste værdi ind i den kortsigtede omkostningsfunktion og får:

$$c^{SR}(y) = 3y^2 + 300 \quad (3.127)$$

Derfor ved vi, at langsigtsomkostningsfunktionen er minimum (over $\bar{k}$) af den kortsigtede omkostningsfunktion.

På lang sigt vil det derfor gælde, at hver virksomhed derfor har justeret sit kapitalniveau til $\bar{k} = \frac{y^2}{4}$, fordi det netop er det omkostningsminimerende punkt, og alle virksomheder ligger i det punkt, hvor deres gns. omkostninger er ved deres minima. Da virksomhederne producerer 10

i langtidsligevægten vil $\bar{k} = \frac{10^2}{4} = 25$. Vi lader nu efterspørgslen falde til:

$$D^{\text{ny}}(p) = 700 - 10p \quad (3.128)$$

Hver enkelt virksomhed har nu marginale omkostninger givet ved:

$$MC = 4y \quad (3.129)$$

Og da vi kræver, $MC = p$ har vi $y = \frac{p}{4}$ for alle 40 virksomheder. De kan dog ikke producere flere end 10 enheder, hvorfor vi skriver:

$$S^{SR} = \begin{cases} \frac{p}{4} & \text{hvis } p \leq 40 \\ 10 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.130)$$

Da alle 40 virksomheder er identiske bliver det aggregerede udbud da:

$$S^{SR} = \begin{cases} 10p & \text{hvis } p \leq 40 \\ 400 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.131)$$

Da udbud skal være lig efterspørgsel har vi altså:

$$700 - 10p = 10p \iff p = 35 \quad (3.132)$$

Som er gyldigt. Ellers havde vi fået $p = 30$, som er i modstrid med definitionsintervallerne. På lang sigt er prisen uberørt, men der vil være færre virksomheder, da den samlede mængde bliver $Q = 100$, og der dermed kun er 10 virksomheder (det gælder, fordi virksomhedernes egne produktionsvalg ikke har ændret sig).

GENEREL LIGEVÆGT

Indtil videre har vi kun analyseret forbrugers valg i tilfælde af, at prisen på den vare, vi ikke analyserer, var eksogent bestemt. Da vi f.eks. betragtede substitutions- og indkomsteffekter, lagde vi til grund for analysen, at prisen på den anden vare ikke ændrede sig. I den afsluttende del af kurset modificerede vi antagelsen og analyserede, hvordan udbud og efterspørgsel interagerede på flere markeder for at skabe en ny, *generel* ligevægt. I det følgende kapitel gennemgås den første del af analysen, hvor forbrugeren har faste initialbeholdninger, og ikke kan producere. En sådan økonomi kaldes for en *bytteøkonomi*.

4.0.1 Grafisk repræsentation	55
4.0.2 Ligevægt	56
4.0.3 Det første velfærdsteorem	60
4.0.4 Det andet velfærdsteorem	60

4.0.1 Grafisk repræsentation

Vi benævner initialbeholdningerne for forbruger A og B ved:

$$[\omega_A^1 + \omega_A^2] \quad \text{og} \quad [\omega_B^1 + \omega_B^2] \quad (4.1)$$

Mens deres allokering skrives som:

$$[x_A^1 + x_A^2] \quad \text{og} \quad [x_B^1 + x_B^2] \quad (4.2)$$

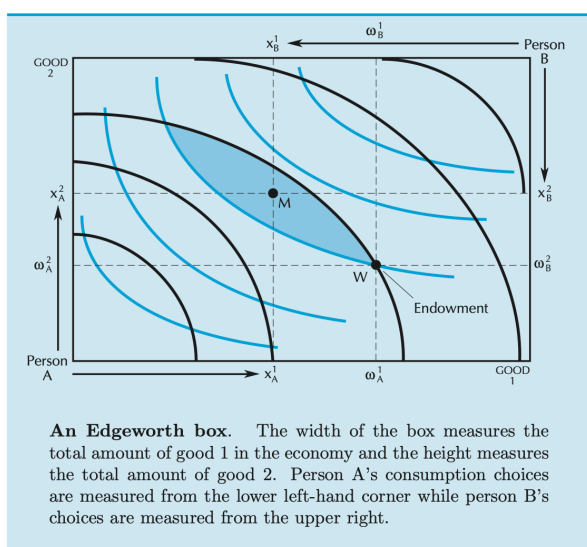
En allokering er opnåelig, hvis det gælder, at summen de efterspurgte goder i allokeringen svarer til den samlede initialbeholdning. Altså:

$$x_A^1 + x_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1 \quad (4.3)$$

$$x_A^2 + x_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2 \quad (4.4)$$

Vi skitserer initialbeholdningerne, samt forbrugernes indifferenskurver i en *Edgeworth boks*, hvor forbruger B er vendt på hoved. Se nedenstående [1]:

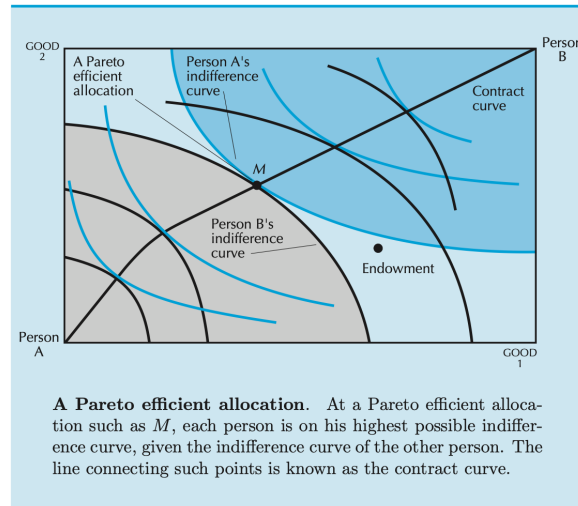
[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 4.1: Edgeworth boks

Vi siger, at en allokering er Pareto efficient, hvis der ikke er nogen måde, hvorpå den ene forbruger kan stilles bedre, uden at den anden stilles dårligere. Det er klart, at punktet w i figur 3.1 ikke er Pareto efficient, idet forbruger A kan stilles bedre ved at mindske sit forbrug af vare 1, og tilsvarende øget sit forbrug af vare 2, og forbruger B har gavn af det omvendte. Derfor vil punktet M f.eks. være en Pareto efficient allokering, idet indifferenskurverne her tangerer og der ikke er nogen måde en af forbrugerne kan stilles bedre på, uden at stille den anden forbrugere dårligere. Kurven, der forbinder alle Pareto efficiente allokeringer, kaldes kontraktkurven. Det er illustreret nedenfor [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 4.2: Kontraktkurven i en Edgeworth-boks

4.0.2 Ligevægt

Vi siger, at en bytteøkonomi er i ligevægt, hvis priserne sikrer, at begge forbruger opnår, $|MRS| = \frac{p_1}{p_2}$, men idet begge forbrugere møder de samme priser på markedet, medfører betingelsen, at:

$$MRS_A = MRS_B \quad (4.5)$$

I en *Walras ligevægt*, skal det desuden gælde, at overskudsefterspørgslen efter begge varer er lig 0. Det vil sige, at:

$$z_1(p_1^*, p_2^*) = x_A^1(p_1^*, p_2^*) - \omega_A^1 + x_B^1(p_1^*, p_2^*) - \omega_B^1 = 0 \quad (4.6)$$

$$z_2(p_1^*, p_2^*) = x_A^2(p_1^*, p_2^*) - \omega_A^2 + x_B^2(p_1^*, p_2^*) - \omega_B^2 = 0 \quad (4.7)$$

Det viser sig, at det er tilstrækkeligt blot at finde priser, der sørger for, at overskudsefterspørgslen for den ene vare er 0, idet *Walras Lov* sikrer, at det andet marked herefter *clearer*. Vi kan altså nøjes med at finde:

$$z_1(p_1^*, p_2^*) = 0 \quad \text{eller} \quad z_2(p_1^*, p_2^*) = 0 \quad (4.8)$$

Bemærk, at vi kan sætte en af de to priser til *numeraire*, når vi løser for ligevægtpriserne (dvs. vi kan sætte $p_1 = 1$ eller $p_2 = 1$). Vi bemærker, at randløsninger kan være efficiente:

$$MRS_A(x_1^A = 0) < MRS_B \quad \text{randløsning i } x_1^A = 0 \quad (4.9)$$

$$MRS_A(x_2^A = 0) > MRS_B \quad \text{randløsning i } x_2^A = 0 \quad (4.10)$$

$$MRS_A > MRS_B(x_1^B = 0) \quad \text{randløsning i } x_1^B = 0 \quad (4.11)$$

$$MRS_A < MRS_B(x_2^B = 0) \quad \text{randløsning i } x_2^B = 0 \quad (4.12)$$

Vi illustrer randløsninger i nedenstående eksempel.

Eksempel 4.0.1 Vi betragter to forbrugere med præferencerne:

$$u(x_A^1, x_A^2) = 4\sqrt{x_A^1} + x_A^2 \quad \text{og} \quad u(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 + x_B^2 \quad (4.13)$$

Den samlede varebeholdning i økonomien er $(\omega_1, \omega_2) = (12, 10)$. Vi starter med at finde den indre kontraktkurve, der opstår når de to marginal substitutionsrater er lig hinanden. Det vil sige:

$$\frac{4}{2 \cdot \sqrt{x_A^1}} = 1 \iff x_A^1 = 4 \quad (4.14)$$

Den indre kontraktkurve opnås altså ved den lodrette linje ved $x_A^1 = 4$. Vi skal nu tænke over, om der kan være randløsninger. Da $MRS_A(x_1^A = 0)$ ikke er defineret, kan der ikke være nogen randløsning i x_1^A . Vi tjekker nu for den anden randløsning, dvs. her vil forbruger A meget gerne have mere af vare 1.

$$\frac{4}{2 \cdot \sqrt{x_1^A}} > 1 \iff x_1 < 4 \quad (4.15)$$

Vi tjekker herefter for den tredje randløsning, dvs. i et punkt, hvor forbruger 2 meget gerne vil have mere af vare 2:

$$\frac{4}{2 \cdot \sqrt{12}} > 1 \quad (4.16)$$

Det er aldrig opfyldt. Vi tjekker nu den sidste betingelse, hvor forbruger B meget gerne vil have mere af vare 1.

$$\frac{4}{2 \cdot \sqrt{12}} < 1 \quad (4.17)$$

Som altid er opfyldt. Kontraktkurven er da givet ved (set fra forbruger A perspektiv):

$$K = \begin{cases} ([0, 4[, 0) & \text{hvis } x_A^1 < 4 \\ (4, \text{alt, der opfylder allokeringen}) & \text{hvis } x_A^1 = 4 \\ (10,]4, 12]) & \text{hvis } x_A^1 > 4 \end{cases} \quad (4.18)$$

Vi gennemgår nu en hel udregning af at finde Walras ligevægten.

Eksempel 4.0.2 Vi betragter to forbrugere med nyttefunktioner givet

ved:

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = 4\sqrt{x_A^1} + x_A^2 \quad \text{og} \quad u_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 x_B^2 \quad (4.19)$$

Initialallokeringerne er:

$$\omega_A = (16, 12) \quad \omega_B = (10, 18) \quad (4.20)$$

Vi starter med at finde den nyttemaksimerende efterspørgsel for forbruger A. Vi genkender med det samme, at det er kvasilineære præferencer (strengt konvekse, monotone, med randløsning) og finder da den indre løsning som:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x_A^1}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_A^1 &= \left[\frac{2p_2}{p_1} \right]^2 = \frac{4p_2^2}{p_1^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

For x_A^2 får vi:

$$\begin{aligned} \frac{4p_2^2}{p_1} + x_A^2 p_2 &= m \\ x_A^2 &= \frac{m - \frac{4p_2^2}{p_1}}{2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Bemærk, at vi kun er i en indre løsning, når:

$$\begin{aligned} m - \frac{4p_2^2}{p_1} &> 0 \\ m &> \frac{4p_2^2}{p_1} \end{aligned}$$

Marshall efterspørgslen bliver derfor:

$$\mathbf{x}_A = \begin{cases} \left[\frac{4p_2^2}{p_1^2}, \frac{m - \frac{4p_2^2}{p_1}}{2} \right] & \text{når } m > \frac{4p_2^2}{p_1} \\ \left[\frac{m}{p_1}, 0 \right] & \text{ellers} \end{cases} \quad (4.23)$$

For forbruger 2 har vi standard CD præferencer og derfor blot:

$$\mathbf{x}_A = \left[\frac{1}{2} \frac{m}{p_1}, \frac{1}{2} \frac{m}{p_2} \right] \quad (4.24)$$

Vi sætter nu $p_2 = 1$ og bestemmer da indkomsten til:

$$m_A = 16p_1 + 12 \quad \text{og} \quad m_B = 10p_1 + 18 \quad (4.25)$$

Vi tjekker begrænsningen for forbruger A:

$$\begin{aligned} 16p_1 + 12 &> \frac{4}{p_1} \\ 16p_1^2 + 12p_1 - 4 &> 0 \end{aligned}$$

$$p_1 > \frac{1}{4} \quad (4.26)$$

Vi er altså i en indre løsning, når $p_1 > \frac{1}{4}$. Her skal overskudsefterspørgslen være nul, dvs:

$$\frac{4}{p_1^2} - 16 + \frac{1}{2} \frac{10p_1 + 18}{p_1} - 10 = 0 \quad (4.27)$$

$$p_1 \approx 0.7 \quad (4.28)$$

Her bliver efterspørgslen:

$$x_A^1 = \frac{4 \cdot 1}{0.7^2} \approx 8.15 \quad (4.29)$$

$$x_A^2 = \frac{16 \cdot 0.7 + 12 - \frac{4}{0.7}}{1} \approx 17.48 \quad (4.30)$$

$$x_B^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 0.7 + 18}{0.7} \approx 17.84 \quad (4.31)$$

$$x_B^2 = \frac{1}{2}(10 \cdot 0.7 + 18) \approx 12.25 \quad (4.32)$$

For randløsningen skal overskudsefterspørgslen ligeledes være 0. Det vil sige:

$$\frac{16 \cdot p_1 + 12}{p_1^2} - 16 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10p_1 + 18}{p_1} - 10 = 0 \quad (4.33)$$

$$p_1 = 4.2 \quad (4.34)$$

Som er højere end vores krav om, at vi i første omgang kunne være i en randløsning ($p_1 < 1/4$). Der findes altså ingen Walrasligevægt her.

Eksempel 4.0.3 Vi betragter igen vores eksempel fra ovenfor, dvs.

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = 4\sqrt{x_A^1} + x_A^2 \quad \text{og} \quad u_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 x_B^2 \quad (4.35)$$

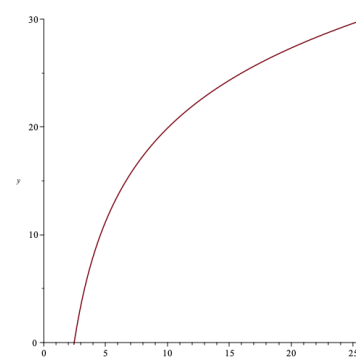
Hvor initialallokeringerne er:

$$\omega_A = (16, 12) \quad \omega_B = (10, 18) \quad (4.36)$$

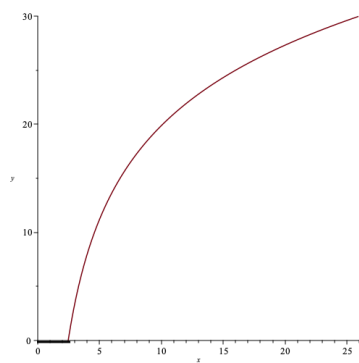
Vi finder MRS og sætter dem lig hinanden:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x_A^1}} &= \frac{x_B^2}{x_B^1} \\ \frac{2}{\sqrt{x_A^1}} &= \frac{30 - x_A^2}{26 - x_A^1} \\ x_A^2 &= \frac{2 \left(15\sqrt{x_A^1} - 26 + x_A^1 \right)}{\sqrt{x_A^1}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Som er den indre kontraktkurve. Den er grafisk tegnet til højre.



Figur 4.3: Den indre kontraktkurve



Figur 4.4: Hele kontraktkurve

Vi kan allerede ane, at der sandsynligvis også vil være en randløsning, hvor $x_A^2 = 0$, jf. illustrationen. Her skal det gælde, at:

$$MRS_A(x_A^2 = 0) > MRS_B$$

$$\frac{2}{\sqrt{x_A^1}} > \frac{30}{26 - X_A^1}$$

(4.38)

Som løses af $x_A^1 = 2.46$. Det er altså paretoefficient, at forbruger 1 har nul af vare 2, hvis $x_A^1 < 2.46$. Hele kontraktkurven bliver da som tegnet til venstre.

4.0.3 Det første velfærdsteorem

Det første velfærdsteorem tilsiger, at enhver Walrasligevægt (generel markedsligevægt under perfekt konkurrence), der opnås i en bytteøkonomi, hvor forbrugerne har monotont voksende præferencer, vil være Pareto efficient. Teoremet forholder sig dog IKKE til nogle fordelingsmæssige implikationer, dvs. en allokering hvor en person har alt vil være paretoefficient, men kan give anledning til uønskede fordelingsmæssige implikationer. Der er desuden to underliggende antagelser:

1. Der er ingen eksternaliteter forbundet med forbrug (ellers ville markedsligevægten ikke være efficient).
2. Agenterne i økonomien er *kompetitive*, dvs. tager priser for givet og har ingen *market power*.

4.0.4 Det andet velfærdsteorem

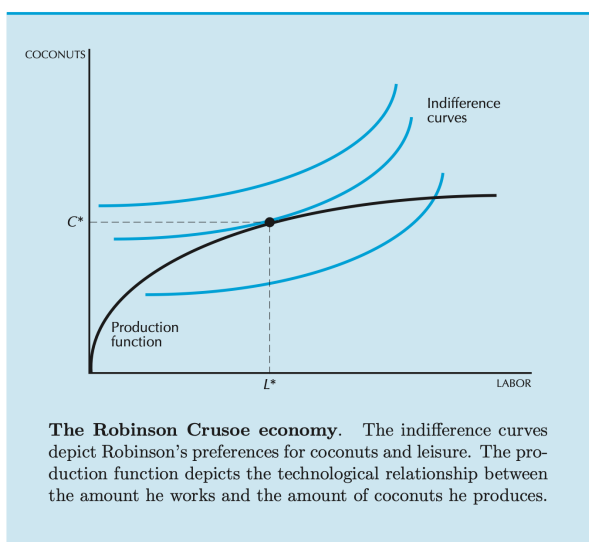
Det andet velfærdsteorem beskriver, at der altid vil eksistere priser, der sikrer, at der indfinder sig en Pareto efficient allokering, uanset initialallokeringer, givet, at begge forbrugere har konvekse præferencer. Bemærk, at priserne dermed spiller en *allokeringsmæssig*- og *fordelingsmæssig* rolle. Det vil sige, at de (1) på den ene side angiver den relative knaphed af en vare, og på den anden side (2) bestemmer, hvor meget en forbruger ender med at have. I følge velfærdsteoremet bør staten altså ikke gribe ind på selve prisstrukturen, men snare omfordele initialallokeringerne (fordi enhver allokering vil lede til paretoefficiente udfald, givet monotone, konvekse præferencer !).

Vi betragter nu en udvidet bytteøkonomi, hvor produktion af goder også indgår. Det vil altså sige, at der ikke længere er en eksogen bestemt mængde af begge varer i økonomien. Vi starter med at kigge på det *simple* tilfælde, hvor der kun er en person involveret.

5.0.1 Koopmans-økonomi . . .	61
5.1 Velfærdsteoremer	69
5.1.1 Det første velfærdsteorem	69
5.1.2 Det andet velfærdsteorem	70
5.2 Generalisering	70

5.0.1 Koopmans-økonomi

I Koopmans-økonomien varetager agenten en todelt rolle, idet han både optræder som producent og forbruger. Det er illustreret nedenfor: På første akse er arbejdstid modelleret, som her er et *bad*, hvorfor



Figur 5.1: Koopmans-økonomi (1)

indifferenskurverne er voksende mod syd-vest, mens andenaksen angiver produktionen/forbruget af den ene vare, der er i økonomien. Vi bemærker, at produktionsfunktionen (der kun afhænger af en faktor, L) har aftagende grænseprodukt. Det er klart, at vi må kræve, at en optimal kombination af arbejdskraft og forbrug/produktion indebærer, at hældningen på produktionsfunktionen er lig hældningen på indifferenskurven. Altså:

$$MRS = MPL \quad (5.1)$$

I ord betyder det, at marginalproduktet af at arbejde en time ekstra nødvendigvis må svare til agentens substitutionsforhold mellem fritid og forbrug. Hvis det ikke var tilfældet (marginalproduktet f.eks. var højere), svarer det til, at forbrugeren kan blive bedre stillet af at arbejde mere, og forbruge mere (og vice versa).

Det profitmaksimerende selskab i økonomien (der ejes alene af vores agent) står overfor prisen 1 (numeraire) på forbrugsgodet i økonomien (C), og betaler agenten en løn på w . Profitten (og dermed isoprofitlinjerne)

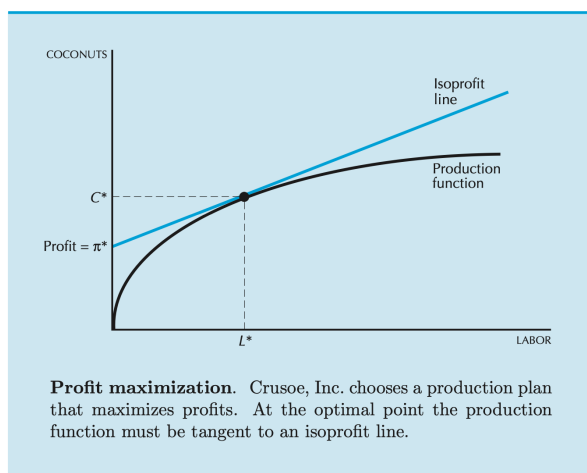
kan derfor skrives som:

$$\pi = C - wL \iff C = \pi + wL \quad (5.2)$$

Det er her igen profitmaksimerende at aflønne arbejdskraft indtil marginalproduktet svarer til lønnen da det ellers kan betale sig at øge eller sænke efterspørgslen heraf (hvis arbejdskraften er mere eller mindre produktiv end sin løn). Altså:

$$MPL = w \quad (5.3)$$

Det er ligeledes illustreret nedenfor:



Figur 5.2: Koopmans-økonomi (2)

Den anden del af problemet er nu, at forbrugeren skal maksimere sin nytte under budgetbegrænsningen. Bemærk her, at forbrugers budgetlinje per konstruktion er sammenfaldende med isoprofitlinjen, idet agenten kan forbruge π forbrugsvarer ved ikke at arbejde ($L = 0$) og forbruget herefter er stigende i L . Kravet til optimum er her — ligesom i vores almindelige nyttemaksimeringsproblemer — at prisforholdet skal svare til MRS . Da prisen på forbrug er normeret til 1 svarer det til, at:

$$MRS = w \quad (5.4)$$

Dermed sikrer isoprofitlinjen/budgetbetingelsen, at Vi netop ender i den situation, der er beskrevet i figur 5.1. En sådan ligevægt er nødvendigvis *paretoefficient*, idet vi kun betragter nytten for en forbruger (som vi maksimerer i punktet). Vi siger, at prisparret $(w, 1)$ og den opnåelige allokering af forbrug (C^*, W^*) , hvor W er fritid, sammen med produktionen (L^*, Y) udgør en generel ligevægt (også omtalt som en Walrasligevægt).

Bemærk, at hvis produktionsteknologien udviser CRS, vil det eneste mulige udfald være, at der er ingen profit (ellers uendelig produktion, eller nedlukning). Derfor vil vi med CRS altid være i et tilfælde, hvor profitten er nul, hvilket alene rykker skæringen med andenaksen i vores diagram. Hvis der er *increasing returns to scale* har problemet ingen løsning.

Eksempel 5.0.1 Vi betragter en forbruger, der har en initialbeholdning af havre på 12 enheder. Han kan bruge havre til at spise, eller han kan fodre sin ko med havre, sådan, at den producerer mælk. Produktionsfunktionen er:

$$y = f(z) = z^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

Forbrugeren får nytte af såvel havre som mælk, og har en nyttefunktion givet ved:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} \quad (5.6)$$

Hvor x_1 er havre og x_2 er mælk. Vi er altså i en Koopmans-økonomi, hvor vi kan forestille os, at koen er producenten. Vi kan opstille virksomhedens isoprofitlinje ved følgende, hvor prisen på mælk er numeraire:

$$\pi = m - p \cdot y \iff m = \pi + p \cdot y \quad (5.7)$$

Virksomhedens profitmaksimeringsproblem er:

$$\max_z p \cdot z - z^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

Som giver os FOC:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} &= p \\ z^{-\frac{1}{2}} &= 2p \\ z^* &= \left[\frac{1}{4p^2} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hvor output er:

$$f(z^*) = \frac{1}{2p} \quad (5.10)$$

Profitten er her:

$$\pi = \frac{1}{2p} - p_1 \cdot z^* = \frac{1}{2p_1} - \frac{1}{4p_1} = \frac{1}{4p_1} > 0 \quad (5.11)$$

Og idet den andenaflædte er oplagt negativ, kan vi være sikre på, at det er et max. Vi har altså løst første del af problemet ved at finde den mængde input virksomheden vil have, når den profitmaksimerer, samt output.

Vi går nu videre til forbrugeren. Vi starter med at betragte hans indkomst, der er givet ved profitten fra den virksomhed han ejer, samt værdien af hans initialallokering. Da:

$$m = p_1 \cdot 12 + p_2 \cdot 0 + \pi = 12p_1 + \frac{1}{4p_1} = \frac{48p_1^2 + 1}{4p_1} \quad (5.12)$$

Vi genkender præferencerne som CD:

$$\mathbf{x} = \left[a \cdot \frac{m}{p_1}, (1-a) \frac{m}{p_2} \right] \quad (5.13)$$

Og kan nu indsætte budgettet:

$$x_1^* = a \cdot \frac{48p_1^2 + 1}{4p_1^2} \quad (5.14)$$

$$x_2^* = (1 - a) \cdot \frac{48p_1^2 + 1}{4p_1} \quad (5.15)$$

Vi udnytter nu, at den endelige allokering skal være mulig, dvs. $x_2 = e_2 + y$, og da $e_2 = 0$ har vi $x_2 = y$. Hvorfor vi indsætter:

$$\begin{aligned} (1 - a) \cdot \frac{48p_1^2 + 1}{4p_1} &= \frac{1}{2p_1} \\ (1 - a) [48p_1^2 + 1] &= 2 \\ 48p_1^2 + 1 &= \frac{2}{(1 - a)} \\ 48p_1^2 &= \frac{2}{(1 - a)} - \frac{1 - a}{1 - a} \\ p_1^2 &= \left[\frac{(1 + a)}{48(1 - a)} \right] \\ p_1^* &= \left[\frac{(1 + a)}{48(1 - a)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Her vil virksomheden vælge at allokere mængden af korn til produktion givet ved:

$$z^* = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{48(1 - a)}{(1 + a)} \right] = \frac{12(1 - a)}{(1 + a)} \quad (5.17)$$

Hvorfor selve output af x_2 bliver:

$$x_2^* = \left[\frac{12(1 - a)}{(1 + a)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

Vi kan nu bestemme forbrugerens efterspørgsel efter vare x_1 som:

$$\begin{aligned} x_1^* &= a \cdot \frac{48 \cdot \frac{1+a}{48(1-a)} + 1}{4 \cdot \frac{1+a}{48(1-a)}} \\ &= a \cdot \frac{\frac{1+a}{1-a} + 1}{\frac{4(1+a)}{48(1-a)}} \\ &= a \cdot \frac{\frac{2}{1-a}}{\frac{1+a}{12(1-a)}} \\ &= \frac{24a}{1 + a} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Og herefter, for god ordens skyld, verificere, at vi får det samme svar som i 5.18 ved at indsætte prisen i 5.15:

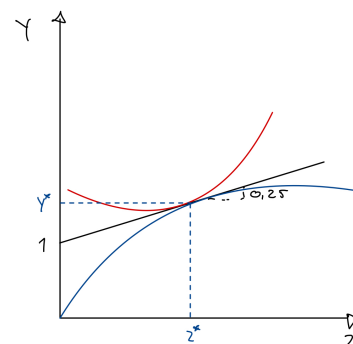
$$x_2^* = (1 - a) \cdot \frac{2}{(1 - a)} \cdot \frac{1}{4 \cdot \left[\frac{(1+a)}{48(1-a)} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{48(1-a)}{1+a} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{12(1-a)}{(1+a)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Udbud er altså lig efterspørgsel. Sammenfattende har vi altså fundet en efterspørgsel efter havre, en pris på havre, et udbud af mælk, en efterspørgsel efter mælk og en efterspørgsel efter havre, der får hele markedet til at clear. Ved $\alpha = 0.5$ vil $p = 0.25$. Derfor bliver isoprofitlinjen.

$$\pi = y - 0.25 \cdot z \iff 1 = y - 0.25 \cdot z \iff y = 1 + 0.25z \quad (5.21)$$

Parameteren a afgør, hvor stor en del af forbruget agenten vælger at bruge på havre. Jo højere parameterværdien er, jo højere skal prisen i ligevægt være. Desuden vil produktionen af x_2 være mindre og forbruget af x_1 højere. Det er illustreret til højre.



Figur 5.3: Ligevægten illustreret i Koopmans diagram

Vi betragter nu endnu et eksempel, men denne gang, hvor vi blot skal finde den paretoefficiente allokering uden at finde priser, der implementerer den.

Eksempel 5.0.2 Lad en virksomhed (der ejes af forbrugeren) have produktionsfunktionen givet ved:

$$y = \frac{1}{2} \ln(2z + K) - \frac{1}{2} \ln(K) \quad (5.22)$$

Hvor $z \geq 0$ er mængden af arbejdskraft og $K > 0$ er en konstant. Forbrugeren ejer beholdningen (L, e) , hvor L er timer til rådighed og e er forbrugsvaren. Han har nyttefunktionen:

$$u(f, x) = 2f + x \quad (5.23)$$

Hvor $f \geq 0$ er fritid, og $x \geq 0$ er forbrugsvaren.

Vi ønsker nu at finde alle de Paretoefficiente allokeringer, dvs. de punkter, hvor forbrugeren ikke kan stilles bedre (da han er den eneste i økonomien), og produktionsplan (z, y) , samt forbrugsplan (f, x) er mulige. Da:

$$x = e + y \quad (5.24)$$

$$f = L - z \quad (5.25)$$

Vi skal altså maksimere forbrugerenes nytte, hvor det gælder, at:

$$\max_{x, f, z, y} 2f + x \quad \text{u.b.b} \quad (5.26)$$

$$x = e + y \quad (5.27)$$

$$f = L - z \quad (5.28)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(2z + K) - \frac{1}{2} \ln(K) \quad (5.29)$$

Som kan skrives som:

$$\max_z 2 \cdot (L - z) + e + \frac{1}{2} \ln(2z + K) - \frac{1}{2} \ln(K) \quad (5.30)$$

Hvor FOC er:

$$\begin{aligned} -2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2z + K)} &= 0 \\ \frac{1}{(2z + K)} &= 2 \\ 1 &= 4z + 2K \\ z^* &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}K \end{aligned} \quad (5.31)$$

Som er et maksimum, fordi den andenordensafledte er negativ $(-\frac{2}{(2z+1)^2})$. Vi ser, at hvis $K \geq 1/2$ vil udtrykket z blive ≥ 0 , hvorfor de paretoefficiante allokeringer her vil være:

$$(f, x) = (L, e) \quad \text{og} \quad (z, y) = (0, 0) \quad (5.32)$$

Hvis $z \leq 1/2$ er z^* dog løsningen, hvorfor vi her får:

$$f^* = L - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}K \right] \quad (5.33)$$

$$y^* = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(K) \quad (5.34)$$

$$x^* = e + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(K) \quad (5.35)$$

$$z^* = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}K \quad (5.36)$$

Vi bestemmer nu arbejdskraftens marginalprodukt for at undersøge, hvordan parameteren K påvirker produktionen:

$$\frac{\delta y}{\delta z} = \frac{1}{(2z + K)} \quad (5.37)$$

Og dermed tilsiger, at personen kun vil producere, hvis $K \leq 1/2$, idet marginalproduktiviteten er faldende i z .

Afsluttende betragter vi et eksempel, hvor vi initialt bestemmer den paretoefficiante allokeringer og herefter implementerer den som markedslikevægt.

Eksempel 5.0.3 Vi betragter en økonomi med en forbruger, og to varer, tid (kan bruges som arbejdskraft eller fritid) og mad. Forbrugeren har præferencer:

$$u(f, x) = f \cdot x \quad (5.38)$$

Hvor f betegner fritid og x betegner mad. Produktionsteknologien er givet ved:

$$y = a \cdot z \quad (5.39)$$

Hvor $z \geq 0$ er input af arbejdstimer og $a > 0$ er en konstant. Initialallokeringen i økonomien er $(L, e) = (24, 0)$, hvorfor resourcebegrænsningen

er:

$$f = 24 - z \quad (5.40)$$

$$x = e + y = y \quad (5.41)$$

Forbrugerens maksimeringsproblem er:

$$\max_{x,f,z,y} f \cdot x \quad \text{u.b.b.} \quad (5.40), (5.41), (5.39) \quad (5.42)$$

Vi kan substituere og få:

$$\max_z (24 - z) \cdot az = 24az - az^2 \quad (5.43)$$

FOC:

$$24a - 2az = 0 \quad (5.44)$$

$$z = 12 \quad (5.45)$$

Hvilket (for $a = 1$) leder til:

$$f^* = 12 \quad (5.46)$$

$$x^* = 12a = 12 \quad (5.47)$$

$$z^* = 12 \quad (5.48)$$

$$y^* = 12a = 12 \quad (5.49)$$

Vi kan dog ikke være sikre på, at det (for $a = 1$) kan implementeres som en Walrasligevægt, da produktionsfunktionen ikke er strengt konkav (den har ikke DRS). Vi forsøger at finde et prispar (w, p) , der danner en sådan ligevægt. Profitmaksimeringsproblemet bliver da:

$$\max_z pz - wz \iff p = w \quad (5.50)$$

Vi sætter nu prisen på mad lig 1 (numeraire), hvilket leder til $w = 1$. Profitten bliver her:

$$\pi = z - z = 0 \quad (5.51)$$

Derfor er forbrugerens indkomst:

$$m = 24w + 0 \cdot x = 24 \quad (5.52)$$

Vi genkender forbrugerens præferencer som CD med faste forbrugsandele. Samtidig husker vi, at $p_1 = w = 1$ og $p_2 = 1$, hvorfor vi har:

$$f^* = \frac{1}{2}24 = 12 \quad (5.53)$$

$$x_{\text{forbrug}}^* = \frac{1}{2}24 = 12 \quad (5.54)$$

Hvorfor prissystemet $(1, 1)$ implementerer Walrasligevægten.

Vi betragter nu et mere generelt tilfælde, hvor initialbeholdningen er $(24, 14)$ og vi betragter et vilkårligt $a > 0$. Forbrugerens nyttefunktion og produktionsteknologien er uændrede. Vi opstiller ressourcebe-

grænsningerne på ny:

$$f = 24 - z \quad (5.55)$$

$$x = 12 + y \quad (5.56)$$

Og skal altså nu igen løse forbrugerens problem under b.b. (5.55), (5.56) og 5.39. Vi indsætter:

$$u(z) = (24 - z) \cdot (12 + az) = 288 + 24az - 12z - az^2 \quad (5.57)$$

Som giver FOC:

$$24a - 12 - 2az = 0 \quad (5.58)$$

$$az = 12a - 6 \quad (5.59)$$

$$z^* = 12 - \frac{6}{a} \quad (5.60)$$

Det er et maksimum, da den andenaflædt er negativ ($-2a$). Den Pareto optimale produktion er:

$$y = 12a - 6 \quad (5.61)$$

Hvilket vil sige, at der kun er positiv produktion, hvis $a > 1/2$. De Pareto optimale tilstande i en randløsning er $(f, x) = (24, 12)$ og $(z, y) = (0, 0)$. I en indre løsning har vi:

$$x^* = 12a + 6 \quad (5.62)$$

$$f^* = 12 + \frac{6}{a} \quad (5.63)$$

$$z^* = 12 - \frac{6}{a} \quad (5.64)$$

$$y^* = 12a + 6 \quad (5.65)$$

Det er igen ikke klart, om ovenstående kan implementeres som en Walras ligevægt i økonomien, da produktionsfunktionen ikke er strengt konkav. Vi opstiller derfor problemet, og starter med at løse virksomhedens profitmaksimeringsproblem:

$$\max_z paz - wz \quad (5.66)$$

FOC:

$$pa - w = 0 \iff pa = w \quad (5.67)$$

Som gælder, hvis $a > 1/2$ Og lader $p = 1$. Virksomhedens profit er da:

$$\pi = az - za = 0 \quad (5.68)$$

Forbrugerens indkomst er da (da $a = w$):

$$m = 24a + 12 + 0 = 24a + 12 \quad (5.69)$$

Forbruget bliver:

$$f^* = \frac{1}{2} \frac{24a + 12}{a} = 12 + \frac{6}{a}$$

$$x^* = 12a + 6$$

Hvilket implementerer Walras ligevægten til prissystemet $(a, 1)$. Hvis $a < 1/2$, er vi i stedet i en situation, hvor $pa < w$, dvs. $a < w$. Der er altså ingen produktion og den samme indkomst. Da markedet skal klare må vi altså kræve, at:

$$\frac{1}{2} \frac{24w + 12}{2} = 24 \iff w = 1/2 \quad (5.70)$$

Hvorfor markedet her clearer ved $(1/2, 1)$.

Vi ser helt generelt, at parameteren a angiver arbejdskraftens marginalprodukt, og forbrugeren kun vil vælge at bruge produktionsteknologien, hvis hans arbejdskraft øgede produktion med mere end $1/2$ ($MPZ > 1/2$), det skyldes, at hans $MRS - \frac{x}{f} = -1/2$ tilsiger, at han vil opgive en time fritid for $1/2$ enhed forbrug, men hvis hans produktion giver mindre end en halv enhed, vil han oplagt ikke producere.

Sådan løses der for en Walrasligevægt

Nedenstående giver en mulig fremgangsmåde til at finde en Walrasligevægt.

- Løs virksomhedens profitmaximeringsproblem for givne priser w, p . Find i den forbindelse (1) efterspørgslen efter arbejdskraft, (2) udbuddet og (3) profitten.
- Løs forbrugers problem og lad indkomsten være givet ved værdien af initialbeholdningen, plus profitten fra virksomheden.
- Sæt efterspørgslen efter varen lig med udbuddet fundet i (1) og løs for en pris.
- Brug prisen til finde den ønskede efterspørgsel efter arbejdskraft, hvorfra du har fritiden (via resourcebegrænsningen). Bestem ligeledes produktionen for at finde udbuddet (som er lig efterspørgslen) af forbrugsvaren.

Sådan løses der for en Paretoligevægt

Nedenstående giver en mulig fremgangsmåde til at finde en Walrasligevægt.

- Opskriv alle resourcebegrænsninger i økonomien.
- Substituer ind i forbrugers efterspørgsel og løs problemet (en ubekendt, z)
- Brug det fundne z til at udlede de øvre tilstandsvariable.

5.1 Velfærdsteoremer

5.1.1 Det første velfærdsteorem

Det første velfærdsteorem tilsiger — også i bytteøkonomien — at en kompetitiv ligevægt er Pareto efficient, så længe, at der hverken er eksternaliteter forbundet med forbrug- eller produktion.

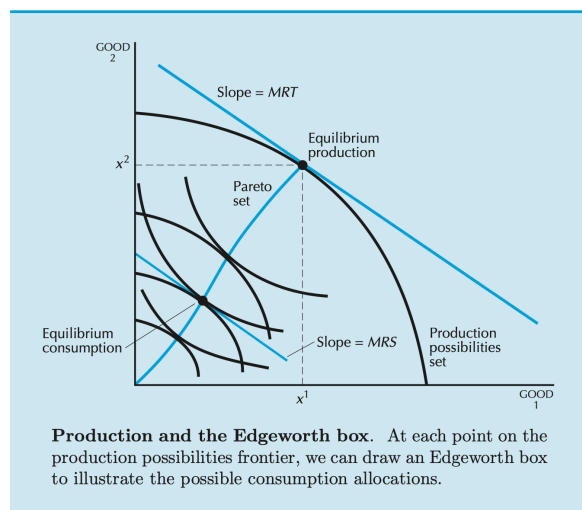
5.1.2 Det andet velfærdsteorem

Enhver Pareto efficient allokering kan opnås af et prispar, hvis forbrugernes nyttefunktion er konveks, og produktionsfunktionen er strengt konkav (dvs. produktionssættet er konvekst).

5.2 Generalisering

Vi kan generalisere ovenstående til en økonomi, hvor der er flere forbrugere. kan vi tegne en Edgeworthboks ud til hver ligevægtsskabende produktionsniveau, og herfra fortsætte med vores almindelige analyse for bytteøkonomien. Det er tegnet nedenfor [1]:

[1]: Varian (2010), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*



Figur 5.4: Produktion og Edgeworthboksen

Her er kravet, at $MRT = MRS$.

Litteratur

Referencerne er angivet nedenfor.

- [1] Hal R. Varian. *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. eighth. New York: W.W. Norton Co., 2010 (citeret på sider 18, 21, 26, 31, 47, 48, 55, 56, 70).