

Makroøkonomi II: Ugeseddel 1

Levi van Boekel

Uge 6, 2025

Opgave 14.2

14.2.1

Vi starter med at omskrive højresiden ved at lade forventningen virke på begge led (det er en lineær operator). Det vil sige:

$$\mathbb{E} [u(C) - u(\bar{C})] = \mathbb{E} [u(C)] - \mathbb{E} [u(\bar{C})] \quad (1)$$

Vi ved nu, at $\mathbb{E} [u(\bar{C})] = u(\bar{C})$, fordi vi i tilstanden $\bar{C}$ opnår forbrugsplanen $\bar{C}$ med sikkerhed – der er her ingen udsving. Dermed kan vi omskrive (1) til det ønskede:

$$\mathbb{E} [u(C) - u(\bar{C})] = \mathbb{E} [u(C)] - u(\bar{C}) \quad (2)$$

Som altså tilsiger, at den forventede forskel i nytten mellem de to tilstande (venstresiden) svarer til den forventede nytte ved det usikre forbrug, fratrullet nytten i den sikre tilstand.

14.2.2

Vi starter med at gengive den generelle anden ordens Taylor approksimation;

$$f(x) - f(\bar{x}) \approx f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 \quad (3)$$

Brug nu udtrykket fra opgaven og indsigten fra (2) i anden linje, hvor forventningen tages:

$$\begin{aligned} u(C) - u(\bar{C}) &\approx u'(\bar{C})(C - \bar{C}) + \frac{1}{2}u''(\bar{C})(C - \bar{C})^2 \\ \mathbb{E} [u(C)] - u(\bar{C}) &\approx \mathbb{E} \left[u'(\bar{C})(C - \bar{C}) + \frac{1}{2}u''(\bar{C})(C - \bar{C})^2 \right] \\ \mathbb{E} [u(C)] - u(\bar{C}) &\approx \mathbb{E} [u'(\bar{C})(C - \bar{C})] + \mathbb{E} \left[\frac{1}{2}u''(\bar{C})(C - \bar{C})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C}) &\approx u'(\bar{C})\mathbb{E}(C - \bar{C}) + \frac{1}{2}u''(\bar{C})\mathbb{E}[(C - \bar{C})^2] \\
\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C}) &\approx u'(\bar{C})[\bar{C} - \bar{C}] + \frac{1}{2}u''(\bar{C})\mathbb{E}[(C - \bar{C})^2] \\
\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C}) &\approx \frac{1}{2}u''(\bar{C})\mathbb{E}[(C - \bar{C})^2] \\
\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C}) &\approx \frac{1}{2}u''(\bar{C})\bar{C}^2\mathbb{E}\left[\left[\frac{(C - \bar{C})}{\bar{C}}\right]^2\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

Hvor vi undervejs har brugt, at såvel $u'(\bar{C})$ og $u''(\bar{C})$ er konstanter.

14.2.3

Vi starter med at dividere begge sider af (4) med $u'(\bar{C})\bar{C}$ og omroterer dernæst. Da:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} &\approx \frac{\frac{1}{2}u''(\bar{C})\bar{C}^2\mathbb{E}\left[\left[\frac{(C - \bar{C})}{\bar{C}}\right]^2\right]}{u'(\bar{C})\bar{C}} \\
\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} &\approx \frac{\frac{1}{2}u''(\bar{C})\bar{C}\mathbb{E}\left[\left[\frac{(C - \bar{C})}{\bar{C}}\right]^2\right]}{u'(\bar{C})} \\
\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} &\approx \frac{1}{2} \frac{u''(\bar{C})\bar{C}}{u'(\bar{C})} \mathbb{E}\left[\left[\frac{(C - \bar{C})}{\bar{C}}\right]^2\right]
\end{aligned}$$

Nu skal vi bruge første ordens Taylor approksimationen af $\ln(C)$ omkring $\bar{C}$, der tilsiger, at:

$$\ln(C) \approx \ln(\bar{C}) + \ln'(C)(C - \bar{C}) \tag{5}$$

Dermed er $\ln(C) - \ln(\bar{C}) \approx \ln'(C)(C - \bar{C})$. Da $\ln'(C) = \frac{1}{C}$ har vi:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} &\approx \frac{1}{2} \frac{u''(\bar{C})\bar{C}}{u'(\bar{C})} \mathbb{E}[\ln(C) - \ln(\bar{C})]^2 \\
\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} &\approx -\frac{1}{2} \left[-\frac{u''(\bar{C})\bar{C}}{u'(\bar{C})} \right] \mathbb{E}[\ln(C) - \ln(\bar{C})]^2
\end{aligned} \tag{6}$$

Som er det ønskede.

14.2.4

Vi ser, at tælleren på venstresiden angiver *netto* nyttetabet ved at vælge det usikre forbrugsplan. Nu bruger vi Taylor approksimationen for et nyttetab, der opstår ved at reducere forbruget med ΔC , da:

$$u(\bar{C} - \Delta C) \approx u(\bar{C}) + u'(\bar{C}) \cdot (-\Delta C) = u(\bar{C}) - u'(\bar{C}) \Delta C \tag{7}$$

Dermed har vi $u(\bar{C}) - u(\bar{C} - \Delta C) = u'(\bar{C}) \Delta C$. Sæt nu de to lig hinanden (altså nyttetab ved risiko og nyttetabet ved at reducere forbruget). Da fås:

$$u'(\bar{C}) \Delta C = \mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C}) \iff \Delta C = \frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})} \quad (8)$$

Som altså nu angiver hvor meget forbrug vi (approksimativt) er villige til at afgive for at have samme nytteniveau efter at have afgivet det, som i den usikre situation). Den relative reduktion findes ved at dividere med $\bar{C}$ og dermed fås det ønskede. Da:

$$\frac{\Delta C}{\bar{C}} = \frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} \quad (9)$$

På højre siden af (6) indgår Arrow/Pratt målet $\left[-\frac{u''(\bar{C})\bar{C}}{u'(\bar{C})}\right]$ positivt, dvs. den reduktion forbrugeren er villig til at gøre, er stigende i risikoaversen (målt ved krumningen).

14.2.5 & 14.2.6

Vi starter med at sætte Arrow/Pratt målet til 5, og omskriver det sidste led:

$$\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} \approx -\frac{1}{2} \times 5 \times \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{C}{\bar{C}}\right)^2\right] \quad (10)$$

Definer nu den stokastiske variabel $X \equiv \ln\left(\frac{C}{\bar{C}}\right)$, der måler forholdet mellem det *naturlige* forbrug og det faktiske forbrug. Den forventede værdi er 0 (på den balancerede vækststi) og derfor bliver $\mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{C}{\bar{C}}\right)^2\right] = \sigma_X^2$. Standardafvigelsen antages at være ca. 4 pct. (som angivet i bogen) og dermed får vi:

$$\frac{\mathbb{E}[u(C)] - u(\bar{C})}{u'(\bar{C})\bar{C}} \approx -\frac{1}{2} \times 5 \times 0.04^2 = -0.004 \quad (11)$$

Som altså svarer til, at husholdningerne er villige til at reducere deres forbrug i den sikre tilstand med 0.4 pct. for at være lige så godt stillet som i den usikre tilstand. Her vil der altså ikke være behov for stabiliseringspolitik (vi har antaget høje værdier for såvel risikoaversion og varians). Som diskuteret til forelæsningerne medtager den simple analyse dog ikke de længerevarende effekter og tager heller ej forbehold for heterogenitet blandt forbrugere (fattige rammes hårdere).