

Økonometri I: Ugeseddel 2

Levi van Boekel

Uge 7, 2025

Opgave 1

1.1

Modellen er:

$$\frac{xfath_i}{xtot_i} = \delta_0 + \delta_1 \log\left(\frac{xtot_i}{price_i}\right) + v_i \quad (1)$$

Vi ser, at der er tale om en level-log model, og dermed angiver $\frac{\delta_1}{\frac{xfath_i}{xtot_i}}$ elasticiteten. Altså; hvor mange pct. ændres forbrugsandelen til fødevarer, når den deflaterede indkomst stiger med 1 pct. Hvis δ_1 er større end 1, svarer det til at forbruget afhænger positivt af indkomsten (normalt gode), mens $\delta_1 < 0$ svarer til det modsatte (inferiørt gode). Teoretisk forventer vi en negativ sammenhæng efter et givent niveau jf. *Engels Lov*.

1.2

Det er sandsynligt, at elementer som alder, geografisk beliggenhed og helbredstilstand kan have en indflydelse på den afhængige variabel og dermed ender i fejllædet v_i . Vi husker, at det skal gælde, at:

$$E(v_i | x_i) = E(v_i) = 0 \quad \forall x_i \quad (2)$$

Det forekommer rimeligt, at den forventede værdi af alder ikke afhænger af x_i , men såvel geografisk beliggenhed og helbredstilstand forventes at samvariare med x_i , hvorfor (2) ikke nødvendigvis er opfyldt og modellen dermed kan være mispecificeret.

Opgave 2

2.1

Resultaterne er vist nedenfor:

Tabel 1: Regression til model 1

(1)	
xfath	
xtot	0.0488*** (0.0135)
_cons	1443.1*** (195.1)
N	258
R^2	0.049

Standard errors in parentheses

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

(i.) Fortolkningen af β_0 er, hvor meget forbrug på mad der ville være, hvis indkomsten var nul, mens fortolkningen af β_1 er, hvor meget forbruget af mad ændres, når indkomsten stiger med 1.

(ii.) Det fremgår af tabellen.

(iii. & iv.) Vi husker, at definitionerne (parantensen angiver STATA værdien):

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (290257408) \quad (3)$$

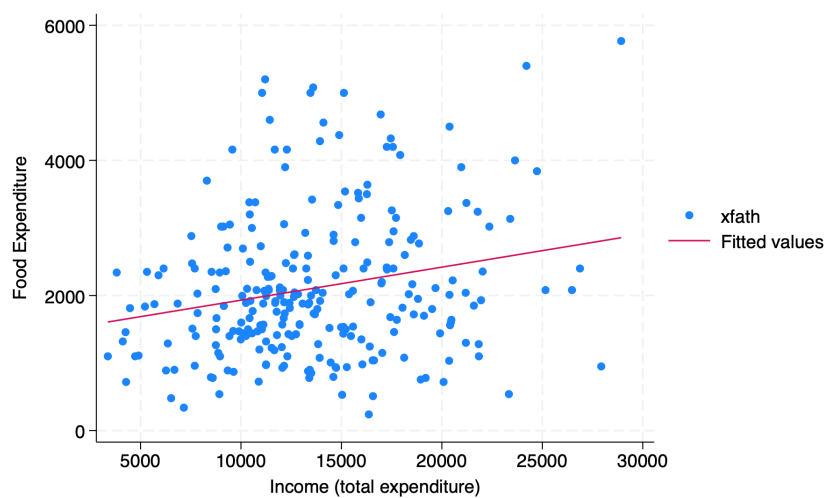
$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (14140149) \quad (4)$$

$$SSR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (276117280) \quad (5)$$

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} \quad \left(\frac{14140149}{290257408} = 0.487 \right) \quad (6)$$

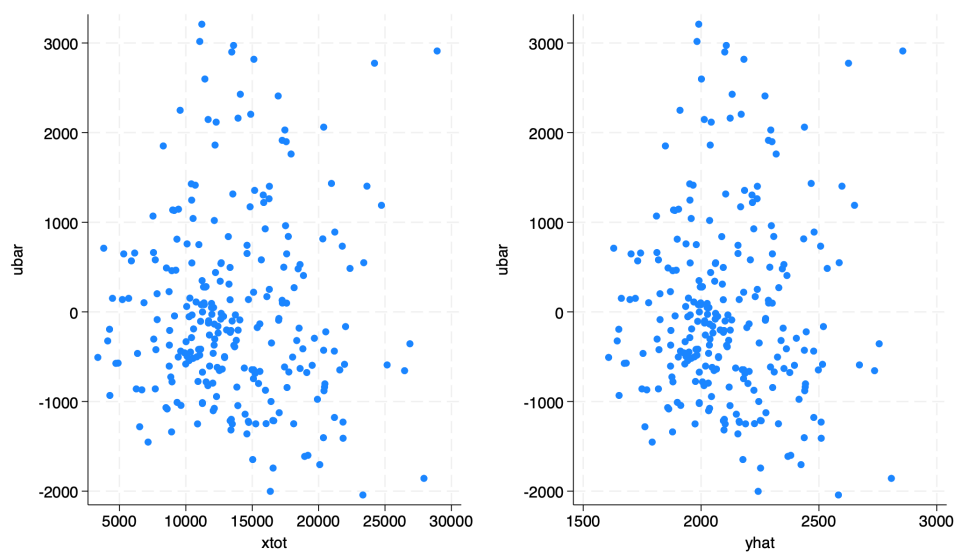
(v.) Variansen af fejlledet er 1.078.583, 1, mens kvadratroden af variansen er 1038.5485.

(vi.) Figuren er vist nedenfor:



Figur 1: Skatterplot og fitted linje

(vii.) Figuren er vist nedenfor



Figur 2: $\bar{u}$ plottet mod x_{tot} og $\hat{y}$

2.2 & 2.3

Modellerne er estimeret nedenfor;

Tabel 2: Regressionsresultater, model (2)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
inc_share_food	inc_share_food	inc_share_food	inc_share_mcloth	inc_share_wcloth	inc_share_alc	inc_share_alc
foodshare	-0.128*** (0.0136)	-0.122*** (0.0157)				
clothshare_men			0.00964 (0.00914)			
clothshare_women				0.0645*** (0.0112)		
alshare					0.0347** (0.0123)	0.0107 (0.00872)
_cons	0.697*** (0.0560)	0.653*** (0.0626)	0.0392 (0.0383)	-0.129** (0.0453)	-0.0544 (0.0463)	-0.00218 (0.0315)
<i>N</i>	258	192	258	192	258	192
<i>R</i> ²	0.258	0.240	0.004	0.149	0.030	0.008

Standard errors in parentheses

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

2.4

Vi ser, at $\delta_1 > 0$ for tøj og alkohol for begge køn, hvor begge dele er normale goder (dog kun marginalt ved tøj for mænd og alkohol for kvinder). Omvendt er mad et inferiørt gode.

Opgave 3

3.1

Den lineære regressionsmodel med et konstantled og en forklarende variabel er kan skrives på matrixform som:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1 (\equiv y)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} \end{pmatrix}}_{n \times 2 (\equiv X)} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}_{2 \times 1 (\equiv \beta)} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{n \times 1 (\equiv u)} \quad (7)$$

Eller mere kompakt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (8)$$

Hvor alle variable er matricer.

3.2

Vi husker, at OLS estimatoren løser:

$$E(\mathbf{X}' \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (9)$$

Hvor vi kan erstatte u med $\hat{u}$ og opnå $\frac{1}{n} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{u}} = 0$ som på matrixform svarer til:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{pmatrix}}_{2 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1} \hat{u}_i \end{pmatrix}}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Dermed kan vi få OLS estimatoren ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \cdot \hat{\mathbf{u}} &= 0 \\ \mathbf{X}' \cdot (y_i - \hat{y}) &= 0 \\ \mathbf{X}' \cdot (y_i - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= 0 \\ \mathbf{X}y_i - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}y_i = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \quad (11)$$

Vi skal nu invertere (11) for at fortsætte. Vi opskriver hertil matricen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{pmatrix}}_{2 \times n (\equiv \mathbf{X}')} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} \end{pmatrix}}_{n \times 2 (\equiv \mathbf{X})} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Vi skal nu invertere (11). Det giver os:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & -\sum_{i=1}^n x_{i1} \\ -\sum_{i=1}^n x_{i1} & n \end{pmatrix} \quad (12)$$

Vi sætter nu tilbage og har:

$$\hat{\beta} = \mathbf{X}y_i \times \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & -\sum_{i=1}^n x_{i1} \\ -\sum_{i=1}^n x_{i1} & n \end{pmatrix} \quad (13)$$

Vi starter med at bestemme det første led:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{pmatrix}}_{2 \times n (\equiv \mathbf{X}')} \times \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1 (\equiv \mathbf{X})} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot y_i \end{pmatrix} \quad (14)$$

Vi sætter (14) ind i (13):

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & -\sum_{i=1}^n x_{i1} \\ -\sum_{i=1}^n x_{i1} & n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot y_i \\ - \sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n y_i + n \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot y_i \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot y_i \\ n \sum_{i=1}^n x_i y_i - n^2 \bar{x} \bar{y}. \end{pmatrix}$$

Nu kigger vi separat på β_1 :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - n^2 \bar{x} \bar{y}}{n(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2) - (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_{i1})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \end{aligned}$$

Nu bruger vi, at:

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y}(n\bar{x}) - \bar{x}(n\bar{y}) + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2
\end{aligned}$$

Dermed har vi:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (15)$$

For β_0 betragter vi:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
\hat{\beta}_0 &= \frac{\bar{y} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
\hat{\beta}_0 &= \frac{\bar{y} [S_{xx} + n\bar{x}^2] - \bar{x} [S_{xy} + n\bar{x}\bar{y}]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
\hat{\beta}_0 &= \frac{\bar{y}S_{xx} - \bar{x}S_{xy}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \bar{x} \frac{\bar{x}S_{xy}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_1 \quad Q.E.D. \quad (16)
\end{aligned}$$

Dermed er det ønskede vist.