Mikroøkonomi II: Ugeseddel 9

Levi van Boekel

Uge 13, 2025

Opgave 1

(A)

Forbruger A maksimerer sin nytte ved at tage forbruger B's bidrag til det offentlige gode for givet. Altså:

$$\max_{x_A, g_A} u_A(g_A + g_B, x_A) \quad \text{u.b.b.} \quad \omega_A = x_A + g_A$$

Dermed får vi FOC til:

$$\frac{\delta u_A(g_A + g_B, \omega_A - g_A)}{\delta g_A} : \quad \frac{\delta u_A}{\delta g_A} - \frac{\delta u_A}{\delta x_A} = 0$$
$$MRS = 1$$

Som er vores klassiske $MRS = c$ betingelse, da prisen her er 1. For $G \leq 12$ har vi derfor:

$$\frac{-\frac{1}{6}(g_A + g_B) + 2}{1} = 1$$
$$g_A = 6 - g_B$$

Vi ser, at A's bidrag er faldende i B's bidrag, dvs. han har incitament til at *freeride*. Mens vi for $G \geq 12$ har $g_A = 0$. Det samme gælder for g_B, da nyttefunktionerne er identiske.

(B)

Vi har:

$$g_A + g_B = 6$$

Men da vi kræver $g_A + g_B = G$, er $g_A = g_B = \frac{G}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Dermed bliver forbruget af alt andet lig:

$$x_i = 10 - 3 = 7 \quad \text{for } i = A, B$$

(C)

De Pareto-optimale tilstande er karakteriseret ved, at en af forbrugerne nyttemaksimerer under hensyn til, at den anden forbruger ikke kan stilles bedre og resourcebegrænsningen er overholdt. Det vil sige:

$$\max_{x_A,x_B,g} u_A(x_A,g) \quad \text{u.b.b.} \quad u_B(x_B,g) \geq \bar{u} \quad \omega_A + \omega_B = x_A + x_B + g$$

For $g \leq 12$ får vi Lagrance funktionen:

$$\mathcal{L}(x_A, x_B, g) = -\frac{1}{12}g^2 + 2g + x_A + \lambda_1(\bar{u} - \frac{1}{12}g^2 - 2g - x_B) + \lambda_2(20 - x_A - x_B - g)$$

FOC:

$$1 + \lambda_2 = 0 \tag{1}$$
$$-\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{2}$$
$$-\frac{1}{6}g + 2 - \lambda_1\frac{1}{6}g - 2\lambda_1 - \lambda_2 g = 0 \tag{3}$$

Fra de første to får vi $\lambda_2 = -1$ og $\lambda_1 = 1$. Det indsættes i den tredje, hvilket giver:

$$\underbrace{-g\frac{1}{6} + 2}_{MRS_A} - \underbrace{\frac{1}{6}g + 2}_{MRS_B} = \underbrace{1}_{c}$$
$$2g = 18$$
$$g^\star = 9$$

Fra resourcebegrænsningen får vi nu, at:

$$x_A + x_B = 11$$

(D)

Det ville ikke gøre nogen forskel, da der ikke er en indkomsteffekt for quasilineære præferencer (lineære præferencer er også kvasilineære).

(E)

Svaret er allerede fundet i (C) og er givet ved $g^\star = 9$, $x_A + x_B = 11$ for $x_A, x_B > 0$

Opgave 2

(A)

Den Pareto-optimale tilstand kan findes ved at maksimere en af familiernes nytter med hensyn til resourcebegrænsningen, samt at de enkelte familier skal have mindst en reservationsnytte, $\bar{u}$, $\tilde{u}$.

$$\begin{aligned}
\max_{x_t, x_s, x_d, g} \; & x_t + a_t \ln(G) \\
& \text{u.b.b.} \\
& x_s + a_s \ln(G) \geq \bar{u} \\
& x_d + a_d \ln(G) \geq \tilde{u} \\
& 4\,x_t + 4\,x_s + 2\,x_d + 5\,G = 4\,\omega_t + 4\,\omega_s + 2\,\omega_d,
\end{aligned}$$

Lagrance bliver:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x_t, x_s, x_d, G) = x_t + a_t \ln(G) + \lambda_1(\bar{u} - x_s - a_s \ln(G)) + \lambda_2(\tilde{u} - x_d - a_d \ln(G)) + \\
\ldots \lambda_3(4\,\omega_t + 4\,\omega_s + 2\,\omega_d - 4x_t - 4x_s - 2x_d - 5G)
\end{aligned}$$

FOC:

$$1 - 4\lambda_3 = 0 \tag{4}$$

$$-\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \tag{5}$$

$$-\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{a_t}{G} - \frac{\lambda_1 a_s}{G} - \frac{\lambda_2 a_d}{G} - 5\lambda_3 = 0 \tag{7}$$

Fra (4) får vi $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, mens (5) giver $\lambda_1 = 1$ og (6) giver $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Dermed har vi:

$$\begin{aligned}
\frac{a_t + a_s + \frac{1}{2}a_d}{G} &= \frac{5}{4} \\
\frac{4a_t + 4a_s + 2a_d}{G} &= 5 \\
\frac{4a_t + 4a_s + 2a_d}{5} &= G^{\star}
\end{aligned} \tag{MRS}$$

Hvor (MRS) netop angiver, at summen af de enkelte MRS for husholdningerne skal være lig marginalomkostningerne ved produktion.

(B)

Netto nytten for familierne er:

$$\begin{aligned} n_t &= 200 - 500 = -300 \\ n_s &= 600 - 500 = 100 \\ n_d &= 1600 - 500 = 1100 \end{aligned}$$

Dermed har vi en samlet nettonytte på:

$$N = -300 \cdot 4 + 100 \cdot 4 + 1100 \cdot 2 = 1400$$

Da $N > 0$ skal det offentlige gode anskaffes.

(C)

En VCG mekanisme vil her være designet således, at det offentlige gode købes, hvis summen af nettonytterne er større end 0. Det vil sige:

$$G(s_1, \ldots, s_{10}) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad S \geq 0 \\ 0 & \text{for} \quad S \leq 0 \end{cases}$$

Omkostningen for den enkelte agent er givet ved nedenstående, hvor agenten skal kompensere de øvrige agenter $\mid S_{-i} \mid$ (den samlede rapporterede nettonytte uden hans egen), hvis agenten er pivotal. Det vil sige:

$$T(s_1, \ldots, s_{10}) = \begin{cases} 500 & \text{for} \quad S \geq 0 \quad \text{og} \quad sign(S) = sign(S_{-i}) \\ 500 + \mid S_{-i} \mid & \text{for} \quad S \geq 0 \quad \text{og} \quad sign(S) \neq sign(S_{-i}) \\ 0 & \text{for} \quad S \leq 0 \quad \text{og} \quad sign(S) = sign(S_{-i}) \\ \mid S_{-i} \mid & \text{for} \quad S \leq 0 \quad \text{og} \quad sign(S) \neq sign(S_{-i}) \end{cases}$$

Hver spillers *best response* er nu, at tale sandt, selvom det ikke nødvendigvis er efficient, da Clark skatten går til spilde (den skal per definition 'smides væk' og må ikke komme agenterne til gode)

(D)

Vi ved, at VCG giver $s = n^\star$ dvs. at hver forbruger rapporterer sin best response. Da ingen af spillerne har numerisk større nytte end $S = 1400$ vil ingen af spillerne lyve. Spillerne n_s og n_d får implementeret deres optimum uanset og selvom n_t stilles bedre uden det offentlige gode, vil det ikke betale sig for vedkommende at lyve. En familie af typen t skulle nemlig overdrive negativt med $x < 1700$, som ville udløse en Clark skat på $S_{-1} = 1700$, hvilket giver et lavere nytteniveau.

(E)

Nu er nettonytterne

$$n_t = 200 - 600 = -400$$
$$n_s = 600 - 600 = 0$$
$$n_d = 1600 - 600 = 1000$$

Hvorfor summen bliver $N = -1600 + 2000 = 400$. Nu bliver en familierne n_d dog pivotale, da nytten uden dem er:

$$S_{-1} = -600$$

Derfor skal den ene familie betale $t = 600$ samt $p = 600$, dvs. samlet $P = 1200$, mens de øvrige t og s familie skal betale $p = 600$.